

6

LE EQUAZIONI DI LAGRANGE

“ On a déjà plusieurs Traités de Méchanique, mais le plan de celui-ci est entièrement neuf. Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, & l’art de résoudre les problèmes qui s’y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème. J’espere que la manière dont j’ai tâché de remplir cet object, ne laissera rien à désirer. ”

Così si apre l’Avertissement (ossia la prefazione) del trattato *Méchanique Analytique* di Lagrange, pubblicato a Parigi nel 1788.¹

Quanto sia vasto il progetto di Lagrange lo si capisce solo addentrandosi nella lettura del suo Trattato, operazione per noi difficoltosa non solo perché richiederebbe la conoscenza delle opere di Archimede, Pappo, Huygens, Stevino, Bernoulli, Varignon, Galileo, Descartes, Roberval, Mersenne, Wallis, Torricelli, Eulero, Newton, d’Alembert e di altri che Lagrange copiosamente cita e discute, ma anche per la difficoltà insita nell’uso di notazioni e di un linguaggio geometrico che a noi non suona più familiare.

Possiamo porre il problema nei termini seguenti. L’equazione di Newton è posta a fondamento di tutta la Meccanica, ma non è agevole servirsene quando si debba riscrivere la stessa equazione facendo uso di coordinate diverse da quelle cartesiane – a noi così familiari. La questione diventa ancor più difficile quando si considerino non solo punti materiali liberi di vagare per lo spazio, ma corpi estesi, o sistemi di punti tra loro connessi mediante leve, fili, carrucole e quanto altro ci propongono le applicazioni della Meccanica. L’uso delle equazioni di Newton, o delle equazioni cardinali, o dell’equazione dell’energia può presentarsi alquanto disagiata. Il formalismo lagrangiano risolve in modo elegante il problema di scrivere le equazioni della dinamica, almeno quando siano soddisfatte alcune ipotesi in qualche senso naturali.

¹ Esistono già molti trattati di Meccanica, ma questo si differenzia per il suo carattere innovativo. Mi sono proposto di ricondurre la teoria di quella Scienza, e l’arte di risolvere i problemi che ad essa rimandano, a formule generali la cui sola applicazione possa fornirci tutte le equazioni necessarie per la soluzione di ciascun caso. Spero che il modo in cui ho cercato di soddisfare quest’esigenza non lasci a desiderare.

6.1 Nozioni elementari di geometria delle superfici

La formulazione lagrangiana della dinamica si fonda in modo essenziale sulla geometria delle superfici. Qui ne introduciamo i concetti basilari, riferendoci senz'altro al caso delle superfici immerse in uno spazio euclideo \mathbb{R}^n . Il lettore interessato potrà trovare una discussione molto più approfondita nel testo [13].

6.1.1 Rappresentazione parametrica locale di una superficie

Consideriamo lo spazio euclideo \mathbb{R}^n , ed un aperto $U \subset \mathbb{R}^m$, con $0 < m \leq n$. Supponiamo assegnata una funzione vettoriale $\boldsymbol{\varphi} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, ovvero un sistema di funzioni regolari (ad esempio di classe C^∞)

$$(6.1) \quad \begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(q_1, \dots, q_m) \\ &\dots \dots \\ x_n &= \varphi_n(q_1, \dots, q_m) , \end{aligned}$$

o, più brevemente, $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(q)$, dove $q \equiv (q_1, \dots, q_m)$ sono delle coordinate in U . Sembra spontaneo affermare che il sistema di funzioni che abbiamo appena scritto rappresenti una superficie $M = \boldsymbol{\varphi}(U) \subset \mathbb{R}^n$ (o, più precisamente, un pezzo di superficie) di dimensione m che giace in \mathbb{R}^n , come illustrato nella figura 6.1. Questo è vero, a patto di imporre che le funzioni assegnate soddisfino due condizioni che non si riconducono alla semplice regolarità: precisamente si richiede che la funzione $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(q)$ sia iniettiva su M (e dunque che sia biunivoca la corrispondenza tra punti di U e punti di M , perché la suriettività è garantita dalla definizione stessa di M), e che inoltre si abbia

$$(6.2) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial q_m} \end{pmatrix} = m .$$

In altre parole, il rango della matrice Jacobiana del sistema di funzioni (6.1) deve essere massimo in tutti i punti dell'aperto U . Diremo in questo caso che la coppia costituita dall'aperto U e dal sistema di funzioni (6.1) è una *carta* della superficie M , e che (q_1, \dots, q_m) sono coordinate locali su M . Se nelle funzioni (6.1) teniamo costanti tutte le variabili q ad eccezione di una otteniamo una curva: tutte le x_1, \dots, x_n dipendono da un solo parametro. A questa curva si dà il nome di *linea coordinata*.

L'aggettivo *locale* associato alla carta tiene conto del fatto che la superficie può ben estendersi oltre la regione descritta nella carta stessa. In tal caso si potrà far uso di carte diverse al fine di darne una descrizione completa, purché le carte siano tra loro compatibili. L'insieme delle carte prende il nome di *atlante*.² Sulle condizioni di compatibilità torneremo più avanti.

² Il termine *carta* è facilmente comprensibile se si pensa alle comuni carte geografiche di una regione. La latitudine e la longitudine assumono valori in un aperto $U \subset \mathbb{R}^2$, e ad ogni coppia di coordinate corrisponde un unico punto sulla carta geografica, ovvero sulla superficie della terra. In modo analogo si riconosce l'origine del termine *atlante*.

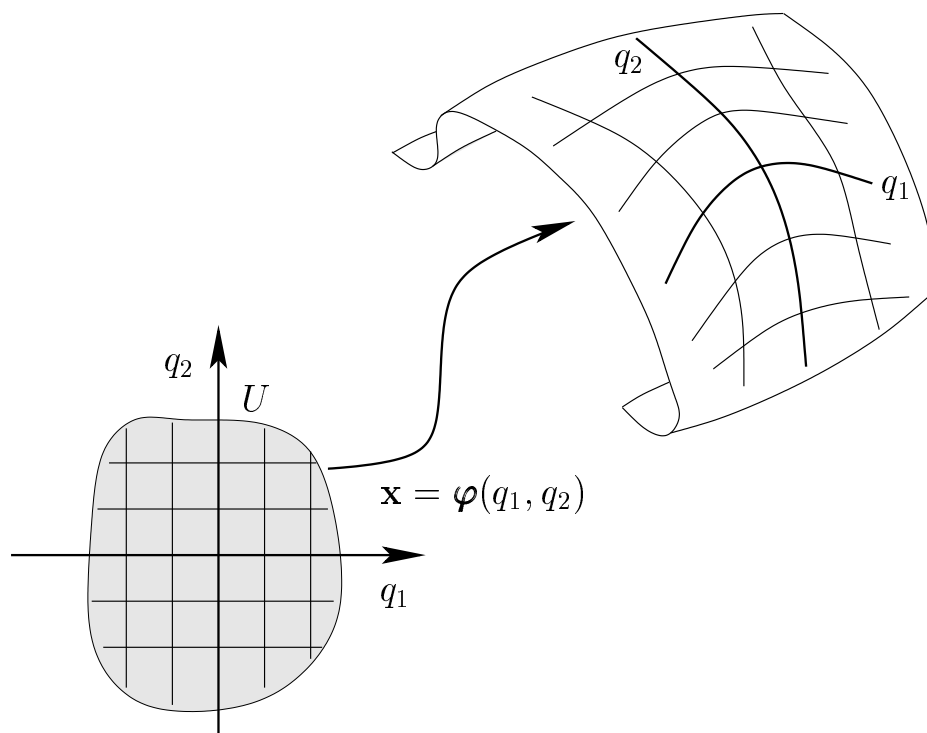


Figura 6.1. Le linee coordinate indotte da una carta su una superficie.

Nel caso $m = n$ parleremo di trasformazione locale di coordinate; nel caso $m < n$ si tratta effettivamente di una superficie, che diremo *immersa* in \mathbb{R}^n .

Esempio 6.1: *Trasformazione lineare di coordinate.* Consideriamo una trasformazione lineare di coordinate

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y} ,$$

ove \mathbf{A} è una matrice reale $n \times n$ non singolare, e \mathbf{y} prende il posto delle coordinate q . In questo caso sia U che M possono ben coincidere con l'intero spazio \mathbb{R}^n . La matrice Jacobiana della trasformazione è proprio \mathbf{A} , che abbiamo supposto avere determinante non nullo. L'intero spazio M è descritto da una sola carta.

Esempio 6.2: *Funzioni di due variabili.* Consideriamo una funzione $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ aperto e con z reale. Riconosciamo in questa espressione l'equazione di una superficie M di dimensione 2 che si proietta in modo univoco sul piano x, y . Per ricondurci allo schema illustrato sopra ci basterà considerare il sistema di funzioni

$$x = q_1 , \quad y = q_2 , \quad z = f(q_1, q_2) ,$$

dove $(q_1, q_2) \in U$. La matrice Jacobiana del sistema di funzioni è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial q_1} & \frac{\partial f}{\partial q_2} \end{pmatrix} ,$$

ed ha evidentemente rango 2.

L'esempio 6.2 si generalizza in modo ovvio al caso di una funzione di più variabili.

Esempio 6.3: *La circonferenza.* Come terzo esempio possiamo considerare il sistema di funzioni

$$x = \cos \vartheta, \quad y = \sin \vartheta,$$

di cui facciamo uso comunemente per rappresentare una circonferenza nel piano. Occorre però qualche puntualizzazione. Non possiamo permettere a ϑ di percorrere tutta la retta, ma dovremo considerare solo un intervallo aperto di lunghezza non superiore a 2π , ponendo ad esempio $U = (-\pi, \pi)$, altrimenti non si avrebbe più biunivocità. D'altra parte si vede bene che in tal modo non si descrive tutta la circonferenza: resta escluso almeno un punto.

Per superare la difficoltà messa in evidenza nell'ultimo esempio si rende necessaria l'introduzione di diverse *carte locali*.

6.1.2 Superfici immerse nello spazio euclideo

Un modo alternativo per descrivere una superficie M immersa in \mathbb{R}^n consiste nel ricorrere alla tradizionale caratterizzazione di un *luogo geometrico dei punti* che soddisfano una determinata proprietà. Si considera pertanto l'insieme

$$(6.3) \quad M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

formato dai punti ove si annulla una assegnata funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, che è supposta regolare (ad esempio di classe C^∞). Anche qui però occorrono due ulteriori condizioni. Si richiede precisamente che M non sia vuoto,³ e che in ogni punto $\mathbf{x} \in M$ una almeno delle derivate $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ non si annulli. Il motivo di quest'ultima condizione risulterà chiaro più avanti.

Esempio 6.4: *Ancora la circonferenza.* Poniamo $n = 2$ e consideriamo la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Il lettore riconoscerà immediatamente che l'equazione $f(x, y) = 0$ descrive una superficie di dimensione 1, o per meglio dire una curva, e precisamente la circonferenza di raggio 1. Vogliamo però introdurre su questa curva una coordinata. A tal fine risolviamo l'equazione rispetto a y , ed otteniamo $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Vediamo subito però che nella migliore delle ipotesi dobbiamo restringerci a considerare $x \in U = (-1, 1)$, intervallo aperto, e che siamo anche obbligati a decidere quale segno attribuire alla radice. In effetti, le carte $\{(-1, 1), +\sqrt{1-x^2}\}$ e $\{(-1, 1), -\sqrt{1-x^2}\}$ — che differiscono solo per il segno della radice — descrivono due semicirconferenze aperte distinte, e sta a noi scegliere una delle due; tale scelta definisce in modo univoco la carta che stiamo utilizzando. Per di più dobbiamo accettare il fatto che i punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$, che sono quelli in cui si annulla la derivata $\frac{\partial f}{\partial y}$, non siano rappresentati in nessuna delle due carte. Per ovviare al problema possiamo risolvere l'equazione $f(x, y) = 0$ rispetto a x , scrivendo $x = \pm\sqrt{1-y^2}$ con $y \in U' = (-1, 1)$. Anche qui, dobbiamo considerare due carte che differiscono per la scelta del segno, escludendo comunque i due punti $(0, -1)$ e $(0, 1)$ in cui si annulla la derivata $\frac{\partial f}{\partial x}$. Nel complesso

³ In altre parole, il punto 0 deve appartenere al codominio della funzione. Questo può sempre ottenersi sostituendo $f(x)$ con $f(x) - c$, scegliendo opportunamente c .

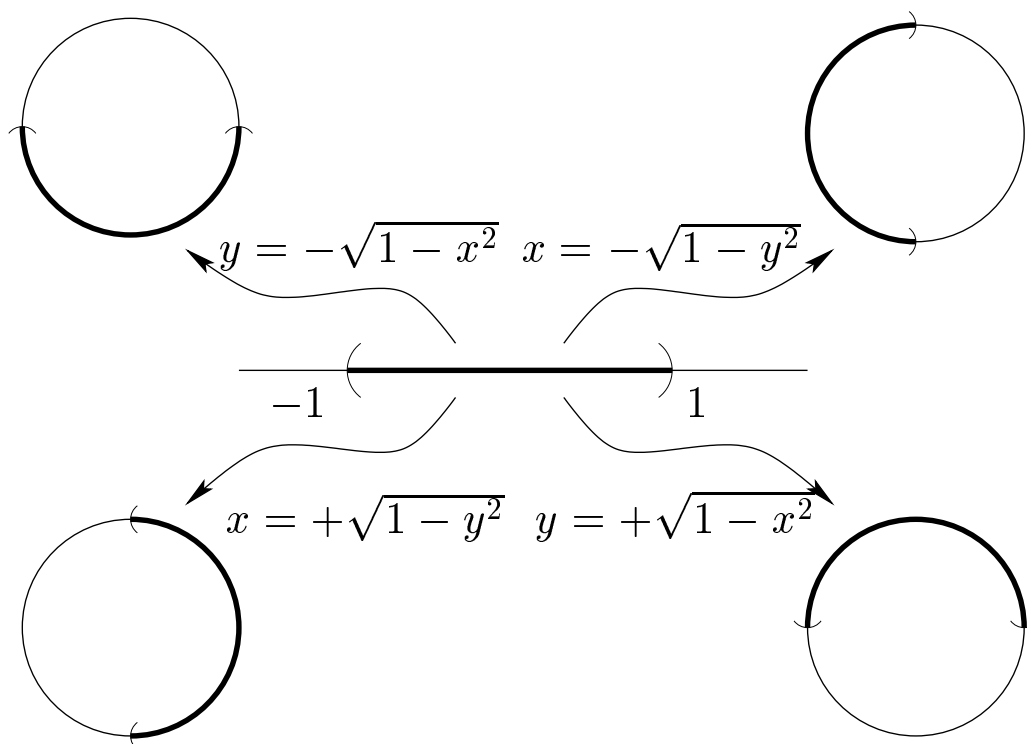


Figura 6.2. Le quattro carte sulla circonferenza dell'esempio 6.4.

abbiamo descritto l'intera circonferenza facendo uso di 4 carte distinte, come illustrato in figura 6.2.

Esempio 6.5: *La superficie sferica.* L'esempio appena discusso si generalizza facilmente al caso di una superficie sferica bidimensionale immersa nello spazio \mathbb{R}^3 , descritta dall'equazione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Procedendo come nell'esempio 6.4 potremo introdurre 6 carte distinte, ciascuna delle quali descrive una metà della superficie sferica escludendo la circonferenza che ne rappresenta il bordo. Ad esempio, la prima carta si costruisce mediante la funzione $z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ con $U = \{(x, y : x^2 + y^2 < 1)\}$ (l'interno del cerchio di raggio 1 nel piano x, y), e descrive la metà superiore della sfera, escluso la circonferenza $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ove si annulla la derivata $\frac{\partial f}{\partial z}$. Le altre carte si costruiscono in modo simile, cambiando il segno della radice e risolvendo l'equazione rispetto a y e z .

Nei due esempi appena illustrati abbiamo cercato di definire delle carte locali della forma $y = \varphi(x)$ oppure $z = \varphi(x, y)$, seguendo la traccia dell'esempio 6.2. La necessità di introdurre carte distinte è chiaramente dovuta al fatto che la superficie (o la curva) descritta in modo implicito dall'equazione non si proietta in modo univoco sul piano (o sulla retta) in modo tale che sia possibile descriverla mediante le $n - 1$ coordinate sul piano o sulla retta. In questi esempi i punti in cui la proiezione perde l'univocità sono quelli in cui si annulla la derivata della funzione rispetto ad una delle coordinate, e diventa impossibile risolvere l'equazione della superficie mediante inversione rispetto a quella coordinata. Ciò giustifica, almeno parzialmente, la condizione imposta sopra

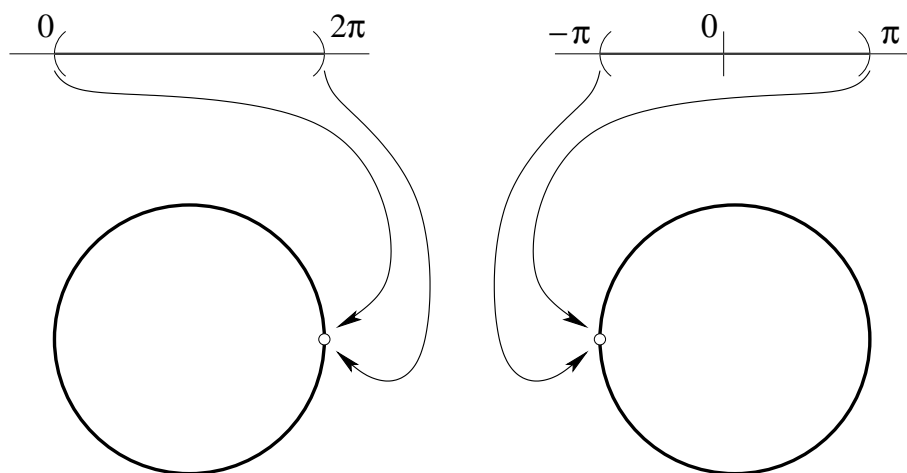


Figura 6.3. Due carte sulla circonferenza descritte nell'esempio 6.6.

alla funzione $f(\mathbf{x})$. Il lettore potrà facilmente costruire esempi analoghi: per limitarsi a casi elementari si pensi ad una superficie cilindrica o conica, oppure a superfici definite da equazioni algebriche di secondo grado in uno spazio di dimensione non inferiore a 3.

Un procedimento più efficace consiste nell'introdurre coordinate locali che meglio si adattano alla natura della superficie e che non coincidano con parte delle coordinate cartesiane dello spazio in cui è immersa la superficie stessa. In effetti abbiamo già visto un caso di questo genere nell'esempio 6.3, che ora riprendiamo in modo completo.

Esempio 6.6: *Coordinata angolare sulla circonferenza.* Considerando ancora le equazioni

$$x = \cos \vartheta, \quad y = \sin \vartheta$$

si vede come l'intera circonferenza possa rappresentarsi mediante due carte, ad esempio una carta $U_1 = (0, 2\pi)$ ed una seconda carta $U_2 = (-\pi, \pi)$. Le due carte sono rappresentate in fig. 6.3. In pratica la complicazione dovuta all'uso delle due carte risulta solo apparente. Nella maggior parte dei casi si considera semplicemente l'intera retta \mathbb{R} sulla quale si pensano come identici tutti i punti che distano tra loro di un multiplo dell'angolo giro. Formalmente: si dice che i due punti x, y di \mathbb{R} sono equivalenti se $x - y = 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$, e si costruisce l'insieme delle classi di equivalenza, detto anche insieme *quoziente*, rispetto a questa relazione, che viene denotato con $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. La circonferenza viene allora identificata come l'insieme delle classi di equivalenza. Si osservi che la suddivisione in classi di equivalenza è compatibile con l'operazione di somma: se x', y' sono equivalenti rispettivamente a x, y , allora $x + y$ e $x' + y'$ sono equivalenti. Tra i matematici è invalso anche l'uso di considerare come lunghezza unitaria quella della circonferenza stessa, sicché si identifica la circonferenza con l'insieme quoziente \mathbb{R}/\mathbb{Z} . La notazione usuale per la circonferenza è S^1 .

Esempio 6.7: *Coordinate geografiche sulla superficie della sfera.* Considerando la sfera immersa in \mathbb{R}^3 , si introducono le coordinate φ, ϑ mediante le funzioni

$$(6.4) \quad x = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = \cos \vartheta$$

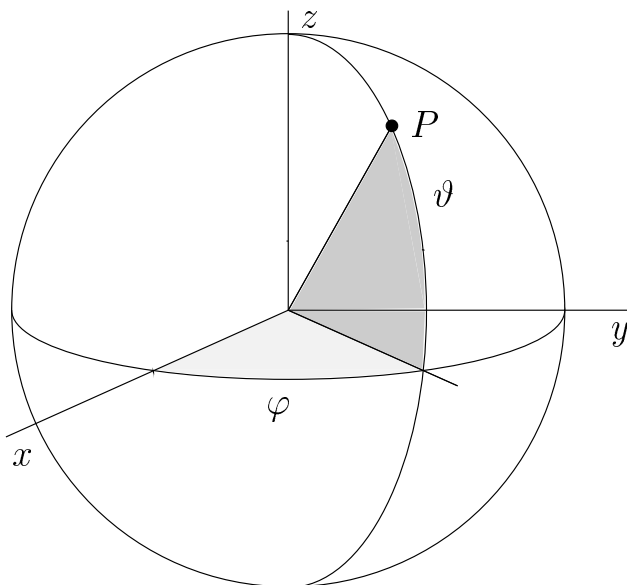


Figura 6.4. Le coordinate geografiche sulla superficie sferica (esempio 6.7).

(si veda la figura 6.4). Anche qui, una sola carta non è sufficiente per descrivere tutta la superficie. Si può iniziare prendendo una prima carta costituita dall'aperto $U_1 = \{\vartheta \in (0, \pi), \varphi \in (0, 2\pi)\}$ e dal sistema di funzioni (6.4), escludendo così i due poli ed il semimeridiano corrispondente a $\varphi = 0$, ovvero la semicirconferenza che giace sul piano x, z , e nel semispazio $x \geq 0$. Si potrà poi completare la rappresentazione con una seconda carta costituita dall'aperto $U_2 = \{\vartheta \in (0, \pi), \varphi \in (-\pi, \pi)\}$ e dalle funzioni

$$x = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad y = \cos \vartheta, \quad z = \sin \vartheta \cos \varphi.$$

In tal modo l'asse polare coincide con l'asse y e si esclude il semimeridiano $\varphi = \pi$, ossia la semicirconferenza che giace nel piano x, y e nel semispazio $x \leq 0$. Le due carte U_1, U_2 coprono così l'intera sfera. In pratica, per l'angolo φ si procede come per la circonferenza (si veda l'esempio 6.6), ossia lo si descrive mediante l'insieme quoziente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Non si può invece ricorrere allo stesso espediente per l'angolo ϑ , che non può variare su tutta la circonferenza, ma solo su una semicirconferenza: il ricorso a due carte distinte è inevitabile.⁴ In geometria si denota comunemente la superficie sferica bidimensionale con S^2 , e con S^n la sfera n -dimensionale immersa in \mathbb{R}^{n+1} e definita mediante l'equazione $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - 1 = 0$.

⁴ Le coordinate sulla sfera introdotte mediante la carta U_1 sono in sostanza le coordinate geografiche di cui si fa uso per descrivere la superficie terrestre: l'angolo φ è la longitudine, che viene misurata a partire dal meridiano di Greenwich, mentre la latitudine è $\lambda = \pi/2 - \vartheta$, con $\lambda \in [-\pi/2, \pi/2]$, sicché l'equatore ha latitudine 0 e il polo nord ha latitudine $\pi/2$. Alla coordinata ϑ viene dato comunemente il nome di *colatitudine*, nel senso di complemento della latitudine. Gli angoli vengono poi misurati in gradi anziché in radianti, ma questa è solo una scelta dell'unità di misura.

In modo ancor più generale, consideriamo un sistema di m equazioni

$$(6.5) \quad f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_r(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad 0 < r < n,$$

con l'ulteriore condizione che le funzioni siano regolari, ad esempio di classe C^∞ , e tra loro indipendenti. Sappiamo dall'Analisi che la condizione di indipendenza è soddisfatta se la matrice Jacobiana del sistema di funzioni ha rango massimo, ossia se vale

$$(6.6) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \end{pmatrix} = r.$$

Sotto queste condizioni le equazioni definiscono *globalmente* una superficie di dimensione $m = n - r$.

Esempi di superficie di questo tipo sono comuni in geometria. Il caso più noto – e del resto alquanto interessante anche per la meccanica – è quello delle possibili intersezioni di un piano con una superficie conica, che danno origine alle cosiddette *sezioni coniche*: circonferenza, ellisse, parabola, iperbole. Alla luce di quanto abbiamo esposto fin qui il lettore non avrà difficoltà a costruirsi le equazioni corrispondenti. Passiamo invece ad un esempio di superficie immersa in uno spazio di dimensione superiore a 3.

Esempio 6.8: *Il toro ad n dimensioni.* Consideriamo lo spazio euclideo \mathbb{R}^{2n} con $n > 1$, e denotiamone le coordinate con $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ (un po' strano, ma se ne vedrà subito la comodità). Consideriamo poi il sistema di n equazioni

$$x_1^2 + y_1^2 - 1 = 0, \quad \dots, \quad x_n^2 + y_n^2 - 1 = 0.$$

La regolarità delle funzioni è evidente. La matrice Jacobiana risulta essere

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_2 & 2y_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2x_n & 2y_n \end{pmatrix},$$

ed ha evidentemente rango n . Infatti è sempre possibile estrarre una sottomatrice quadrata $n \times n$ con determinante non nullo semplicemente scegliendo una sola colonna per ciascuna coppia di coordinate x_j, y_j : se una delle coordinate x_j si annulla non può essere nulla la corrispondente y_j . Il lettore si convincerà facilmente che la superficie descritta da ciascuna delle equazioni $x_j^2 + y_j^2 - 1 = 0$ può pensarsi come un cilindro che ha raggio 1 e per asse un sottospazio di dimensione $2n - 2$ in \mathbb{R}^{2n} . La superficie risultante dall'intersezione degli n cilindri così costruiti coincide con il prodotto cartesiano di n circonferenze. Infatti la proiezione di un punto qualsiasi della superficie su ogni piano x_j, y_j giace proprio su una circonferenza, e la superficie coincide con l'insieme delle n -uple $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ di punti ciascuno dei quali appartiene ad una circonferenza. A questa superficie si dà il nome di *toro*, e si indica con \mathbb{T}^n . Per

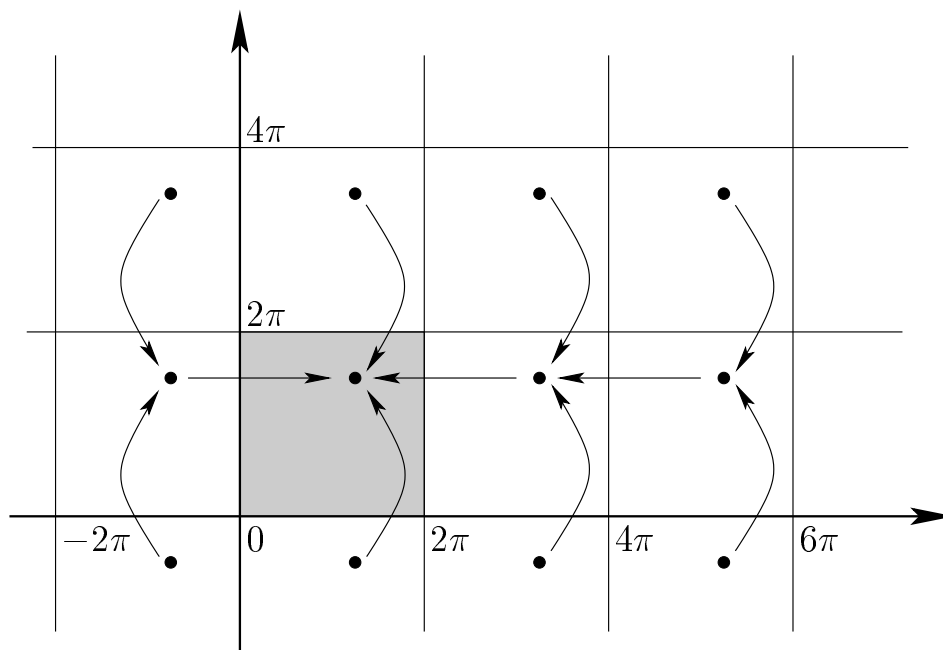


Figura 6.5. Rappresentazione del toro \mathbb{T}^2 nel piano \mathbb{R}^2 : tutti i punti rappresentati sono tra loro equivalenti, ed hanno un unico rappresentante nel quadrato $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.

introdurre delle coordinate locali, che indicheremo con $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$, basta considerare il sistema di $2n$ funzioni

$$(6.7) \quad x_j = \cos \vartheta_j, \quad y_j = \sin \vartheta_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

dove ciascuna delle coordinate $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$ varia in un intervallo aperto, ad esempio l'intervallo $(0, 2\pi)$. Il lettore si renderà conto facilmente che in tal modo si considera l'aperto

$$U = (0, 2\pi) \times \dots \times (0, 2\pi)$$

che unitamente al sistema di funzioni (6.7) costituisce una carta del toro. D'altra parte questa carta non descrive tutto il toro \mathbb{T}^n , perché esclude tutti gli n piani $\Pi_j = \{(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} : x_j = 1, y_j = 0\}$, con $j = 1, \dots, n$. Occorrerà dunque introdurre altre carte. Per semplicità discutiamo questo aspetto nel caso $n = 2$.

Esempio 6.9: *Il toro di dimensione 2.* Considerando per semplicità il toro di dimensione $n = 2$, estendiamo la rappresentazione della circonferenza discussa nell'esempio 6.6. A tal fine basta riferirsi al piano \mathbb{R}^2 , descritto dalle coordinate ϑ_1, ϑ_2 , considerando come equivalenti i punti le cui coordinate differiscono di un multiplo dell'angolo giro. Formalmente: i punti $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ e $(\vartheta'_1, \vartheta'_2)$ sono equivalenti se $\vartheta_1 - \vartheta'_1 = 2k_1\pi$ e $\vartheta_2 - \vartheta'_2 = 2k_2\pi$ con k_1, k_2 interi. In tal modo ogni punto del piano ha un rappresentante nel quadrato $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$, come illustrato in figura 6.5. Il lettore osserverà però che il quadrato così definito comprende anche il lato inferiore ed il lato sinistro; dunque non è aperto, e non può considerarsi propriamente una carta. Per

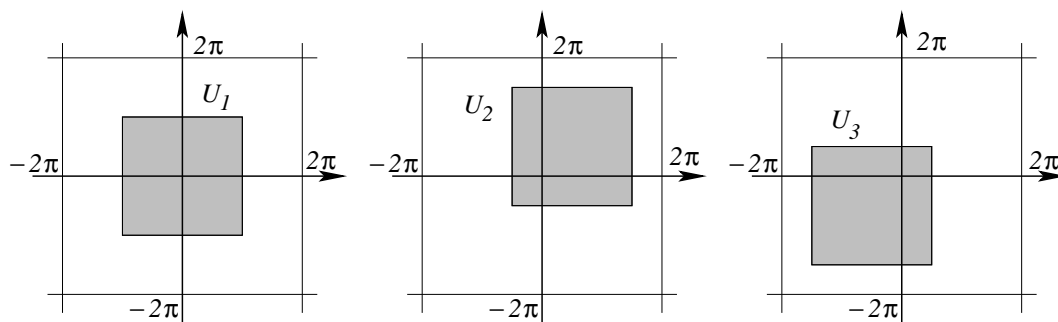


Figura 6.6. Copertura del toro \mathbb{T}^2 con un atlante composto dalle tre carte $U_1 = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, $U_2 = (-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ e $U_3 = (-\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

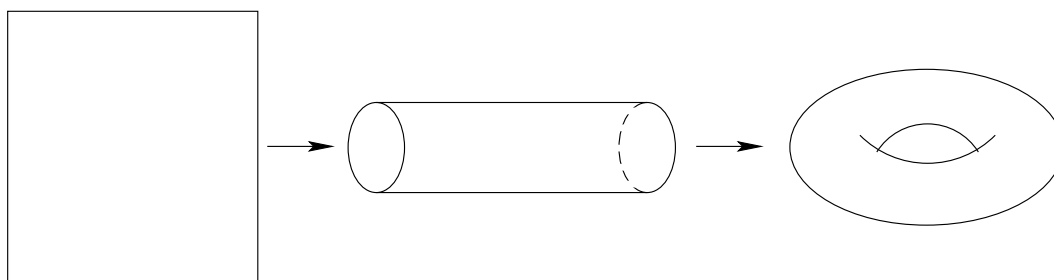


Figura 6.7. La rappresentazione del toro come superficie di una ciambella immersa nello spazio tridimensionale.

costruire un atlante che descriva tutto il toro occorrono più carte costruite mediante quadrati aperti. Una scelta possibile è illustrata in figura 6.6: l'atlante è costituito da 3 carte. Tuttavia, come abbiamo visto nel caso della circonferenza, il ricorso esplicito alle carte distinte viene spesso evitato tenendo conto semplicemente della periodicità degli angoli. In tal modo si ha anche una rappresentazione visiva semplice del toro bidimensionale. A tal fine, osservando che il lato superiore del quadrato $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ deve pensarsi coincidente con quello inferiore si può avvolgere il quadrato stesso a cilindro, incollando i due lati equivalenti; ciò si può fare, ad esempio, con un foglio di carta. Poi, osservando che le due circonferenze che delimitano il cilindro (e che provengono dai lati destro e sinistro del quadrato) debbono anch'esse pensarsi come coincidenti, si curva il cilindro fino ad incollare i due bordi. Questa seconda operazione non è chiaramente eseguibile con un cilindro realizzato a partire da un foglio di carta: ciò rende bene il fatto che l'immersione del toro \mathbb{T}^2 nello spazio tridimensionale non può effettuarsi rispettando le lunghezze.

6.1.3 Le coordinate lagrangiane

La costruzione di carte locali per una superficie immersa in \mathbb{R}^n definita globalmente mediante un sistema di funzioni della forma (6.3) richiede l'introduzione di un sistema di coordinate in qualche modo adattato alla superficie stessa, almeno in senso locale. In quasi tutti gli esempi seguiti fin qui abbiamo introdotto una o più carte locali assegnando le coordinate $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dei punti della superficie come funzioni

di $m \leq n$ coordinate locali q_1, \dots, q_n . Così, in effetti, abbiamo costruito la coordinata angolare sulla circonferenza, o le coordinate geografiche sulla sfera, o ancora le coordinate angolari sul toro \mathbb{T}^n .

Ciò che caratterizza le coordinate locali q_1, \dots, q_m è proprio il fatto che siano definite su un aperto $U \subset \mathbb{R}^m$, e che non sussistano tra di esse relazioni che costringano una delle coordinate a dipendere dalle altre. In effetti, la possibilità stessa di seguire una delle linee coordinate sulla superficie dipende proprio dal fatto che è lecito far variare liberamente (in un aperto) una sola delle coordinate q_1, \dots, q_n , tenendo fisse tutte le altre. Non così accade invece per le coordinate x_1, \dots, x_n nel caso in cui la superficie sia definita in modo implicito, come nel caso del sistema di equazioni (6.5): non è possibile far variare una sola delle coordinate senza accettare che anche altre debbano cambiare, pena la violazione delle equazioni che definiscono la superficie. Ciò accade, in generale, quando la superficie abbia dimensione $m < n$.

La circostanza che le coordinate q_1, \dots, q_m siano tra loro indipendenti si esprime dicendo che sono *coordinate lagrangiane*, oppure *coordinate libere*.

Ora, è spontaneo chiedersi se sia sempre possibile introdurre delle coordinate lagrangiane per una superficie definita in modo implicito. In effetti, non è difficile rendersi conto che inventarsi delle coordinate libere che non siano quelle naturali in \mathbb{R}^n è spesso questione che richiede abilità ed immaginazione. È immediato chiedersi se non si possano utilizzare come coordinate libere alcune delle x_1, \dots, x_n . In altre parole, osservando che le equazioni (6.5) formano un sistema di r equazioni in n incognite ci si chiede se non si possa, ad esempio, risolvere il sistema rispetto alle variabili x_1, \dots, x_r considerate come incognite, determinandole così in funzione delle rimanenti coordinate x_{r+1}, \dots, x_n . In effetti così abbiamo proceduto nel trattare gli esempi 6.4 (la circonferenza) e 6.5 (la sfera). Naturalmente gli esempi mostrano che in generale non sarà possibile scegliere sempre le prime r coordinate come incognite e determinarle in funzione delle restanti: saremo talvolta costretti ad effettuare una permutazione di coordinate, ma questo non lede la generalità del procedimento.

È qui che entra in gioco l'ipotesi di indipendenza delle funzioni $f_1(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x})$ espressa dalla (6.6). Illustriamo il procedimento di inversione con un esempio. Supponiamo che in un punto assegnato $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ la condizione (6.6) sia soddisfatta perché non si annulla il determinante delle prime r colonne della matrice, ossia

$$(6.8) \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{pmatrix} (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \neq 0 .$$

Consideriamo lo sviluppo di Taylor troncato al primo ordine nell'intorno del punto $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, ossia

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) \\ &\dots \dots \dots \\ f_r(x_1, \dots, x_n) &= f_r(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f_r}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_r}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) , \end{aligned}$$

dove le derivate devono essere valutate nel punto $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. Se ci fermiamo a questo ordine di approssimazione possiamo equagliare a zero i secondi membri di queste equazioni, ed otteniamo un sistema di equazioni lineari che possiamo riscrivere nella forma

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \frac{\partial f_1}{\partial x_{r+1}}(x_{r+1} - \bar{x}_{r+1}) - \dots - \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) \\ \vdots \\ -f_r(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \frac{\partial f_r}{\partial x_{r+1}}(x_{r+1} - \bar{x}_{r+1}) - \dots - \frac{\partial f_r}{\partial x_n}(x_n - \bar{x}_n) \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che le derivate sono valutate nel punto $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, e dunque gli elementi della matrice sono numeri reali. Poiché la matrice ha determinante non nullo,⁵ possiamo risolvere il sistema rispetto alle incognite x_1, \dots, x_r , determinandole come funzioni delle rimanenti $m = n - r$ coordinate x_{r+1}, \dots, x_n , come desideravamo. Più precisamente, otteniamo in questo modo l'approssimazione lineare delle funzioni che vorremmo determinare. Resta da mostrare che questa prima approssimazione della soluzione può essere corretta in modo che venga soddisfatto il sistema di equazioni completo, e non solo la sua approssimazione lineare. Se le funzioni sono analitiche si può procedere con uno sviluppo in serie della soluzione, e mostrare che essa è convergente, sicché le soluzioni sono funzioni anch'esse analitiche. Se sono soddisfatte ipotesi di regolarità più deboli si fa ricorso tipicamente al metodo delle contrazioni. Si arriva così a dimostrare il *teorema delle funzioni implicite*, che garantisce che in un intorno del punto $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ si possono effettivamente determinare x_1, \dots, x_r in funzione delle rimanenti coordinate mantenendo la regolarità delle funzioni di partenza. In altre parole, ponendo $m = n - r$ si ha il sistema

$$(6.9) \quad \begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(q_1, \dots, q_m), & \dots, & & x_r &= \varphi_r(q_1, \dots, q_m) \\ x_{r+1} &= q_1, & \dots, & & x_n &= q_m, \end{aligned}$$

che è il sistema di funzioni che definisce una carta locale. La condizione (6.2) risulta verificata. In effetti, il calcolo delle derivate nel punto $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ richiede solo la conoscenza dell'approssimazione lineare delle funzioni che abbiamo determinato poco sopra. La matrice Jacobiana delle funzioni (6.9) ha nelle prime r righe la matrice inversa della (6.8), che compare nell'equazione per la parte lineare, e questa ha determinante diverso da zero nel punto $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. Per continuità, il determinante resta non nullo anche in un intorno di quel punto, sicché è soddisfatta la condizione di regolarità (6.2).

Possiamo dunque concludere che per una superficie definita in modo implicito è sempre possibile costruire una rappresentazione parametrica, e dunque un insieme di carte locali.

⁵ Per l'ipotesi (6.6) è sempre possibile effettuare una permutazione delle coordinate x_1, \dots, x_n in modo che ciò avvenga.

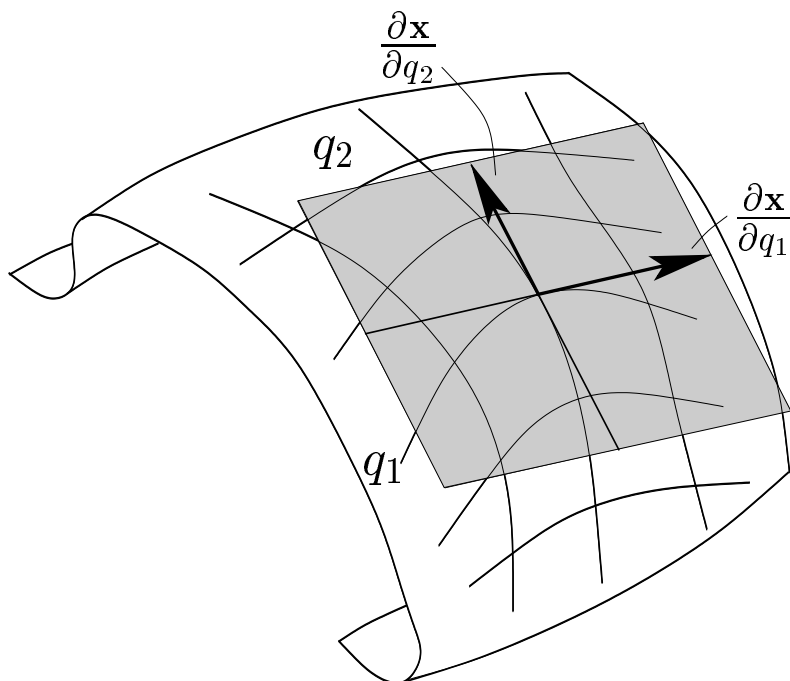


Figura 6.8. Le coordinate locali sulla superficie permettono di definire in modo naturale una base per il piano tangente in un punto.

6.1.4 Lo spazio tangente e le velocità generalizzate

Consideriamo ora un punto della superficie M identificato dalle coordinate lagrangiane $(q_1, \dots, q_m) \in U$ tramite una carta, e supponiamo di far variare una sola di queste coordinate, diciamo q_j , tenendo fisse tutte le altre. Percorreremo dunque una delle linee coordinate, come abbiamo già detto ed illustrato nella figura 6.1. Pensando ad un piccolo spostamento da q_j a $q_j + h$ possiamo considerare il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(q_1, \dots, q_j + h, \dots, q_m) - \mathbf{x}(q_1, \dots, q_j, \dots, q_m)}{h} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j}.$$

L'esistenza del limite è assicurata dalle ipotesi di regolarità delle funzioni, che abbiamo posto fin dall'inizio. Osserviamo che la quantità $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j}$ così definita è un vettore in \mathbb{R}^n che dobbiamo pensare come spiccato dal punto $\mathbf{x}(q_1, \dots, q_m)$, e che per come è costruito è tangente alla linea coordinata q_j e dunque anche alla superficie M su cui la linea coordinata giace. Possiamo costruire così un insieme di m vettori

$$(6.10) \quad \left\{ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_m} \right\}$$

tangenti alla superficie M : tale procedimento è illustrato in figura 6.8. Ora, la condizione (6.2) impone appunto che questi vettori siano linearmente indipendenti, il che assicura che le linee coordinate si intersechino trasversalmente nel punto $\mathbf{x}(q_1, \dots, q_m)$, ossia che due qualunque delle curve coordinate non siano tra loro tangenti. Se consi-

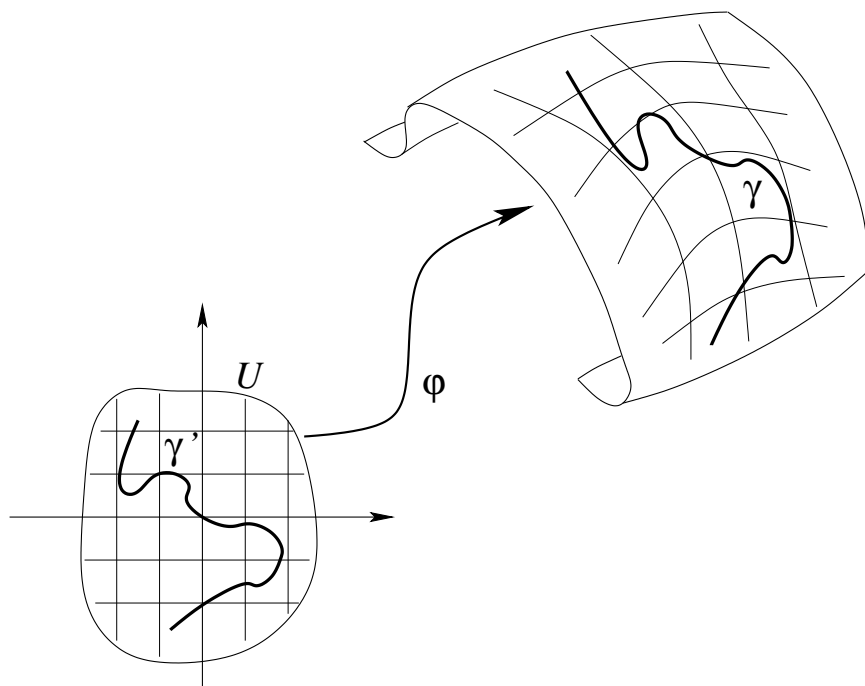


Figura 6.9. La curva tracciata sull'aperto $U \in \mathbb{R}^m$ viene riprodotta sulla superficie tramite la carta.

deriamo l'insieme dei punti

$$\left\{ \mathbf{x} + \alpha_1 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1} + \dots + \alpha_m \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_m}, (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

vediamo subito che questo è un piano di dimensione m in \mathbb{R}^n che passa per il punto $\mathbf{x}(q_1, \dots, q_m)$. Se poi ci restringiamo a considerare questo piano prendendone il punto $\mathbf{x}(q_1, \dots, q_m)$ come origine otteniamo uno spazio vettoriale di dimensione m , di cui l'insieme dei vettori (6.10) costituisce una base. A questo spazio si dà il nome di *spazio tangente* alla superficie M nel punto $\mathbf{x}(q_1, \dots, q_m)$, e lo si denota solitamente con $T_{\mathbf{x}}M$ (o talvolta con $TM_{\mathbf{x}}$). I vettori (6.10) costituiscono la *base locale coordinata* nello spazio tangente. Naturalmente essi dipendono dalla scelta delle coordinate locali q_1, \dots, q_n .

Se abbiamo a disposizione un atlante di carte potremo effettuare questa costruzione in ogni punto della superficie, sicché a ciascun punto risulterà associato uno spazio tangente.

Limitiamoci per ora ad una carta locale, e supponiamo assegnate m funzioni regolari $q_1(t), \dots, q_m(t)$, con $t \in \mathcal{I}$, un intervallo aperto reale scelto in modo che la sua immagine tramite le funzioni assegnate non esca dalla carta U . Abbiamo dunque un tratto di curva in U , che tramite le funzioni $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(q)$ della carta genera una curva sulla superficie, come illustrato in figura 6.9. Con un piccolo abuso di notazione indicheremo ancora con $\mathbf{x}(t)$ questa curva. Se poi pensiamo a t come al tempo possiamo ben dire che stiamo considerando un movimento sulla superficie.

Consideriamo ora un punto $t_0 \in \mathcal{I}$, e denotiamo $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$. È naturale definire

la velocità del movimento $\mathbf{x}(t)$ nel punto \mathbf{x}_0 , ovvero all'istante t_0 , come

$$\mathbf{v}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t_0 + h) - \mathbf{x}(t_0)}{h} ,$$

ovvero come

$$\mathbf{v}(t_0) = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \right|_{t=t_0} .$$

Ricordando poi che \mathbf{x} dipende da t tramite (q_1, \dots, q_n) calcoliamo subito

$$\mathbf{v}(t_0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} \dot{q}_j \Big|_{t=t_0} ,$$

ovvero che $\mathbf{v}(t_0)$ è un vettore dello spazio tangente alla superficie nel punto \mathbf{x}_0 , e che le sue componenti sulla base (6.10) sono le derivate \dot{q}_j valutate all'istante t_0 . Alle variabili $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ si dà il nome di *velocità generalizzate*.

6.1.5 La metrica sulla superficie

Dimentichiamo ora per un momento la superficie, e consideriamo solo lo spazio euclideo \mathbb{R}^n in cui essa è immersa. Ricordiamo che in \mathbb{R}^n si può definire un prodotto scalare, e di conseguenza una norma ed una distanza. Il prodotto scalare euclideo viene definito come

$$(6.11) \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n x_j y_j .$$

La norma e la distanza sono allora

$$(6.12) \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} , \quad \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| .$$

La nozione di distanza ci permette di calcolare la lunghezza di una curva, nel modo seguente. Supponiamo assegnata una curva γ tra due punti A e B in \mathbb{R}^n , definita come curva immersa in forma parametrica, ossia

$$\gamma = \{ \mathbf{x}(t) , \ t \in [t_0, t_1] \}$$

e con le ulteriori condizioni $\mathbf{x}(t_0) = A$, $\mathbf{x}(t_1) = B$. Si approssima poi la curva con una spezzata, e si calcola la lunghezza approssimata della curva mediante la lunghezza della spezzata. Infine si manda a zero la lunghezza dei tratti della spezzata, e si valuta la lunghezza della curva come limite delle lunghezze approssimate: l'esistenza del limite è assicurata se la funzione $\mathbf{x}(t)$ che definisce la curva è sufficientemente regolare. Per effettuare un tal calcolo si osserva che, detto $d\mathbf{x} = (dx_1, \dots, dx_n)$ un trattino della spezzata, il quadrato della sua lunghezza può scriversi (con la notazione classica risalente a Gauss)

$$(6.13) \quad ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 .$$

Scrivendo poi $d\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} dt$, e quindi generando la spezzata che approssima la curva mediante una suddivisione dell'intervallo $[t_0, t_1]$ in tratti di lunghezza dt , abbiamo

anche

$$(6.14) \quad ds = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2} dt ,$$

L'interpretazione cinematica di quest'ultima espressione, che può essere estesa a quelle che seguono, è che la lunghezza di un tratto rettilineo Δs è data dal prodotto della velocità di percorrenza del tratto per il tempo necessario a percorrerlo. Grazie alla (6.14) potremo definire la lunghezza $l(\gamma)$ della curva γ come

$$(6.15) \quad \ell(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2} dt .$$

Ora, questo procedimento si può trasportare in modo naturale alle curve definite su una superficie M immersa nello spazio euclideo \mathbb{R}^n . In effetti, una curva sulla superficie è anche una curva immersa nello spazio \mathbb{R}^n , sicché in linea di principio basta applicare la formula (6.15). Ma è più interessante riscrivere il procedimento in termini delle coordinate lagrangiane sulla superficie.

Anzitutto osserviamo che la curva γ potrà ben scriversi come

$$\gamma = \{ \mathbf{x}(q_1(t), \dots, q_m(t)) , t \in [t_0, t_1] \} .$$

In altre parole, possiamo pensare ad una curva γ' tracciata nell'aperto $U \subset \mathbb{R}^m$ ove è definita la carta, e a γ come all'immagine di γ' sulla superficie M tramite le funzioni $\boldsymbol{\varphi}$ della carta, come illustrato in figura 6.9. Il secondo passo consiste nel determinare la lunghezza ds di un piccolo tratto di curva sulla superficie M . A tal fine osserviamo che possiamo ben calcolare il prodotto scalare tra due vettori appartenenti allo spazio tangente a M in un punto \mathbf{x} assegnato, così come possiamo calcolare la norma di un vettore nello stesso spazio tangente: lo spazio tangente eredita il prodotto scalare euclideo dello spazio \mathbb{R}^n in cui M è immersa. Se $(q_1(t), \dots, q_m(t)) \in U$ è un punto della curva γ' , e $(dq_1, \dots, dq_m) = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) dt$ è un piccolo tratto di curva percorso nel tempo dt , ad esso corrisponderà uno spostamento

$$d\mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} dt = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} \dot{q}_j dt = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} dq_j$$

nello spazio tangente alla superficie M nel punto $\mathbf{x}(q_1(t), \dots, q_m(t))$. Si calcola dunque la lunghezza del trattino di curva sulla superficie come

$$(6.16) \quad ds^2 = \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} dq_j \right)^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m g_{jk}(q_1, \dots, q_n) dq_j dq_k ,$$

dove $g_{jk}(q_1, \dots, q_m)$ è una matrice simmetrica $m \times m$ definita come

$$(6.17) \quad g_{jk}(q_1, \dots, q_m) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} .$$

Infine si calcola la lunghezza della curva come

$$(6.18) \quad \ell(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{j,k} g_{jk}(q_1(t), \dots, q_m(t)) \dot{q}_j \dot{q}_k} dt$$

L'aspetto interessante in quest'ultima equazione è che la lunghezza della curva può calcolarsi quando sia nota la matrice $g_{jk}(q_1, \dots, q_m)$ in ciascun spazio tangente $T_{\mathbf{x}}M$, per tutti i punti $\mathbf{x} \in M$. Si dice che la matrice $g_{jk}(q_1, \dots, q_m)$ è una *metrica* o un *tensore metrico* sulla superficie M . Si osservi che le ipotesi di regolarità sulle funzioni della carta implicano la regolarità della metrica sulla superficie M .

Ancor più interessante è il fatto che la metrica possa essere usata anche per definire in ciascun spazio tangente $T_{\mathbf{x}}M$ un *prodotto interno* (o prodotto scalare) ereditato dal prodotto scalare euclideo dello spazio \mathbb{R}^n . A tal fine occorre considerare due curve distinte γ e γ' , parametrizzate rispettivamente dalle funzioni $(q_1(t), \dots, q_n(t))$ e $(q'_1(t), \dots, q'_n(t))$, che si intersecano in un punto $\mathbf{x} \in M$ ad un determinato istante t_0 . In quel punto possiamo calcolare la velocità di ciascuna delle due curve, che denoteremo rispettivamente con

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j}, \quad \mathbf{v}' = \sum_{j=1}^n \dot{q}'_j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j}.$$

Il prodotto scalare euclideo di questi due vettori è

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = \left(\sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \dot{q}'_k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} \right) = \sum_{j,k} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}'_k = \sum_{j,k} g_{jk} \dot{q}_j \dot{q}'_k,$$

dove abbiamo usato la definizione (6.18) della metrica.

Al fine di familiarizzarsi con questi concetti è utile considerare il caso di una trasformazione lineare di coordinate della forma $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y}$, come nell'esempio 6.1. Per svolgere il calcolo è conveniente denotare con $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ la base canonica di \mathbb{R}^n , sicché scriveremo $\mathbf{x} = \sum_{l=1}^n x_l \mathbf{e}_l$, e con a_{lk} gli elementi della matrice \mathbf{A} e la trasformazione di coordinate si scriverà in modo più esplicito $x_l = \sum_{k=1}^n a_{lk} y_k$. Calcoliamo allora

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} \sum_{l=1}^n x_l \mathbf{e}_l = \frac{\partial}{\partial y_j} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{lk} y_k \mathbf{e}_l = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{lk} \delta_{jk} \mathbf{e}_l = \sum_{l=1}^n a_{lj} \mathbf{e}_l;$$

nel calcolo abbiamo usato il simbolo δ di Kronecker: $\delta_{jj} = 1$, e $\delta_{jk} = 0$ se $j \neq k$. Questa espressione ci fornisce le coordinate del vettore $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_j}$ sulla base canonica di \mathbb{R}^n : come era da aspettarsi, si tratta semplicemente della j -esima colonna della matrice \mathbf{A} . Il calcolo della metrica ci dà immediatamente

$$(6.19) \quad g_{jk} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_k} = \sum_{l=1}^n a_{lj} a_{lk},$$

che è palesemente una matrice simmetrica.

Se ora scomponiamo due vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} sulla nuova base, scrivendo

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_j}, \quad \mathbf{w} = \sum_{j=1}^n w_j \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_j}$$

ne calcoleremo il prodotto scalare come

$$(6.20) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{j,k} g_{jk} v_j w_k .$$

Vediamo dunque che l'espressione del prodotto scalare è di poco più complessa di quella abituale che abbiamo utilizzato nella (6.11). Ciò perché stiamo facendo uso di una base che non è necessariamente ortonormale.⁶ È appena il caso di osservare che il prodotto scalare euclideo, che abbiamo definito nella (6.11), ha esattamente la forma generale (6.20), con la metrica definita dalla matrice identità: $g_{jk} = \delta_{jk}$.

Ricordiamo ora la definizione di prodotto interno, o prodotto scalare, che si usa in geometria. Ricordiamo anzitutto che viene detta *forma bilineare* sullo spazio vettoriale V una funzione $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni coppia \mathbf{v}, \mathbf{w} di vettori di V un numero reale che denoteremo⁷ con $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, e che sia lineare in ambedue i suoi argomenti, ossia tale che per qualunque terna di vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}$ in V e per qualunque coppia di numeri reali a_1, a_2 valga

$$\begin{aligned} \langle a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle &= a_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w} \rangle + a_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle, \\ \langle \mathbf{w}, a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 \rangle &= a_1 \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_1 \rangle + a_2 \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Definizione 6.1: *Un prodotto interno su uno spazio vettoriale reale V è una forma bilineare che sia:*

- (i) *simmetrica, ossia $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ per ogni coppia di vettori \mathbf{v}, \mathbf{w} ;*
- (ii) *definita positiva, ossia che per ogni $\mathbf{v} \neq 0$ valga $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$.*

La seconda condizione implica che la forma bilineare sia anche *non degenera*: se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ per ogni \mathbf{v} allora $\mathbf{w} = 0$. In altre parole, un vettore ortogonale a qualunque vettore in V è necessariamente nullo.⁸

Torniamo ora allo spazio tangente. La formula (6.20) definisce su questo spazio una forma bilineare che, per coerenza con le notazioni che abbiamo introdotto, riscriveremo come

$$(6.21) \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{j,k} g_{jk}(q_1, \dots, q_m) \dot{q}_j \dot{q}'_k$$

⁶ Una base $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ di \mathbb{R}^n è ortonormale se per ogni coppia j, k vale $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_k = \delta_{jk}$, ossia se i vettori hanno lunghezza unitaria e sono mutuamente ortogonali.

⁷ In queste note riserveremo la notazione $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ al prodotto scalare euclideo, come definito nella (6.19), mentre ricorremo alla notazione $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$, più comune in geometria, quando faremo riferimento a spazi vettoriali sui quali il prodotto scalare è definito mediante una metrica non necessariamente euclidea.

⁸ La dimostrazione è semplice. Supponiamo che esista $\mathbf{w} \neq 0$ soddisfacente $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ per tutti i \mathbf{v} . Allora è anche $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 0$, contro la proprietà (ii).

ove intendiamo con \dot{q}_j, \dot{q}'_k le componenti dei vettori \mathbf{v}, \mathbf{w} sulla base dello spazio tangente. Vale allora la seguente

Proposizione 6.2: *La forma bilineare (6.21) con la matrice g_{jk} definita dalla (6.19) è un prodotto interno su ogni spazio tangente $T_{\mathbf{x}}M$.*

Dimostrazione. La simmetria è evidente dalla definizione. Per dimostrare che la forma bilineare è definita positiva procediamo per assurdo, supponendo che non lo sia. Allora esiste $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) \neq 0$ tale che $\sum_{j,k} g_{jk}(q_1, \dots, q_m) \dot{q}_j \dot{q}_k = 0$. Per come è definita la matrice g_{jk} ciò implica che si abbia $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ con $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} \dot{q}_j$. Per la condizione (6.2) può essere $\mathbf{v} = 0$ solo se $q_1 = \dots = q_m = 0$. Dunque dovrebbe essere $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ con $\mathbf{v} \neq 0$, il che non è possibile. *Q.E.D.*

Ne concludiamo che per ciascun punto $\mathbf{x} \in M$ lo spazio tangente $T_{\mathbf{x}}M$ è dotato di un prodotto interno, e di conseguenza di una nozione di distanza. Quando una superficie S è dotata di una metrica g si dice che è una *superficie Riemanniana*. La metrica può essere assegnata in modo arbitrario, e non è necessariamente quella indotta dall'immersione nello uno spazio euclideo.

Passiamo ora a discutere alcuni esempi espliciti di calcolo della metrica.

Esempio 6.10: *Le coordinate sferiche.* Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 , dotato di coordinate x, y, z , introduciamo le coordinate sferiche r, ϑ, φ definite mediante le relazioni

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta.$$

In lettore osserverà immediatamente che le coordinate diventano singolari su tutto l'asse z , perché ivi non è definito l'angolo φ , e in $r = 0$ non è definito neppure ϑ . Abbiamo dunque una carta che è solo locale, ma non ce ne curiamo, perché comunque possiamo definire la metrica su questa carta.

Iniziamo col determinare i vettori della base, calcolandone le componenti sulla consueta base cartesiana $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$. Ricordando che

$$\mathbf{x} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z = r \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{u}_x + r \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{u}_y + r \cos \vartheta \mathbf{u}_z$$

calcoliamo immediatamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} &= \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{u}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{u}_y + \cos \vartheta \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \vartheta} &= r \cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{u}_x + r \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{u}_y - r \sin \vartheta \mathbf{u}_z \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} &= -r \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{u}_x + r \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{u}_y. \end{aligned}$$

Infine, eseguendo i prodotti scalari richiesti calcoliamo la metrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6.1: Seguendo la traccia dell'esempio 6.10 calcolare la metrica per i casi seguenti.

- (i) Coordinate polari: $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$.
- (ii) Coordinate cilindriche: $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$, $z = z$.
- (iii) La superficie sferica: $x = \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = \cos \vartheta$.
- (iv) La superficie di un cilindro: $x = \cos \vartheta$, $y = \sin \vartheta$, $z = z$.
- (v) La superficie di un cono: con $\alpha \in (0, \pi/2)$ fissato, $x = r \sin \alpha \cos \varphi$, $y = r \sin \alpha \sin \varphi$, $z = r \cos \vartheta$.

6.2 Sistemi vincolati

Il problema dei vincoli si pone quando si considerano sistemi di punti materiali i cui spostamenti sono soggetti a limitazioni. Tali limitazioni possono essere reciproche, ad esempio perchè i corpi sono collegati da fili o aste leggere, oppure possono riguardare i singoli punti, assoggettati a muoversi ad esempio su fissate superficie. Fra le limitazioni che si possono prendere in considerazione vi è quella che richiede ai punti di mantenere distanza costante, e che conduce al modello più semplice di corpo esteso, il cosiddetto corpo rigido. Premettiamo una breve discussione sui vari tipi di vincolo, rimandando per una discussione più approfondita ai trattati di Meccanica Razionale.

6.2.1 Vincoli olonomi

Consideriamo un sistema di N punti materiali nello spazio euclideo \mathbb{R}^n . Diremo che avremo assegnato la *configurazione* del sistema quando siano date le posizioni $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ di tutti i punti. Diremo che i punti sono soggetti ad un vincolo *olòno*mo quando la configurazione dei punti debba obbedire ad una relazione della forma⁹

$$(6.22) \quad f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) = 0.$$

Se le funzioni qui date non dipendono dal tempo si parla di *vincoli fissi*; in caso contrario di *vincoli mobili*.¹⁰

Esempio 6.11: *Punto vincolato ad una superficie.* L'esempio più semplice è quello di un punto vincolato a muoversi su una circonferenza. In tal caso possiamo pensare ad un punto nel piano descritto dalle coordinate cartesiane x, y , ed il vincolo si esprime semplicemente dicendo che in ogni istante debba valere $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, dove R è il raggio della circonferenza. Nel linguaggio dei testi classici di Meccanica Razionale è

⁹ Il termine *olòno*mo deriva dal greco *όλος*, che significa *intero* e *νόμος*, che significa *legge*. Si intende che il vincolo è descritto da una *legge intera*, ossia non differenziale, e che in particolare non dipende dalla velocità.

¹⁰ Nei trattati classici i vincoli fissi vengono detti anche *sclerònomi*, ed i vincoli mobili vengono detti *reònomi*. Anche questi due termini derivano dal greco: *σκληρός* significa rigido, e *ρεός* significa corrente (nel senso di fluido che scorre, usato anche in senso figurato).

anche d'uso dire che la circonferenza giace nel piano verticale se il punto deve pensarsi soggetto alla forza peso, mentre si dice che la circonferenza giace nel piano orizzontale se il peso non viene considerato. Esempi elementari sono un pendolo, ossia una massa sospesa ad un filo perfettamente inestensibile e privo di massa, idealizzato come un'asticella perfettamente rigida, oppure il vagone di un trenino che si muova su una rotaia di forma circolare appoggiata sul pavimento. Un altro esempio tipico è un punto materiale che possa muoversi senza attrito su una guida rettilinea o curva, oppure sulla superficie di un recipiente di forma sferica, o conica, o di paraboloide, &c. Il lettore potrà lasciare che la sua fantasia si sbizzarrisca a trovare altri esempi. Si potrà anche considerare il caso di superfici mobili nel tempo: ad esempio una guida che ruota intorno ad un suo estremo, oppure un punto su un pallone che viene gonfiato.

Esempio 6.12: *Il vincolo di rigidità.* Diremo che due punti sono collegati rigidamente se le loro coordinate $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ obbediscono alla relazione $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = d$, dove d è costante nel tempo. Possiamo immaginare che i due punti siano tra loro collegati da un'asta perfettamente rigida e priva di massa. È questo il prototipo di un sistema più complesso, costituito da N punti collegati da aste rigide: si pensi a molti modelli di molecole in uso nei laboratori di chimica, ove gli atomi vengono rappresentati con sfere e la struttura della molecola viene costruita collegando tra loro gli atomi proprio mediante asticelle. Se poi si pensa di far tendere a zero il volume e la massa di ciascun punto e mandare N all'infinito mantenendo costante la densità (ovvero la massa per unità di volume) si può pensare ad un corpo rigido continuo come costituito da un'infinità di piccole masse, con la condizione che la distanza tra due punti qualunque del corpo non muti nel tempo.

Si distingue solitamente anche tra vincoli *bilateri*, definiti mediante una relazione del tipo (6.22), e vincoli *unilateri*, in cui si considera piuttosto una relazione della forma

$$(6.23) \quad f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \geq 0$$

(eventualmente con \leq anziché \geq). Si pensi ad esempio al vincolo del pavimento (si può saltare, ma si spera che il pavimento non si sfondi) o a quello del filo a piombo (la distanza dal punto di sospensione non può superare la lunghezza del filo, ma il filo può ben piegarsi ed attorcigliarsi).

Il lettore riconoscerà immediatamente che lo strumento geometrico per descrivere un sistema soggetto a vincoli olonomi ed unilateri è proprio quello delle superfici, di cui si è discusso nel paragrafo 6.1. È conveniente anche formalizzare il problema in modo astratto descrivendo il sistema di N punti mediante un unico vettore $\mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N) \in \mathbb{R}^{3N}$, nello spazio euclideo a $3N$ dimensioni. Una relazione di vincolo si scriverà allora proprio nella forma $f(\mathbf{x}) = 0$. Analogamente, la presenza contemporanea di più vincoli olonomi e bilateri si scriverà mediante un sistema di funzioni indipendenti

$$f_1(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x}) = 0,$$

ove r è il numero dei vincoli. La superficie corrispondente in \mathbb{R}^{3N} ha dimensione $n = 3N - r$, e si descrive localmente mediante n coordinate lagrangiane, o coordinate

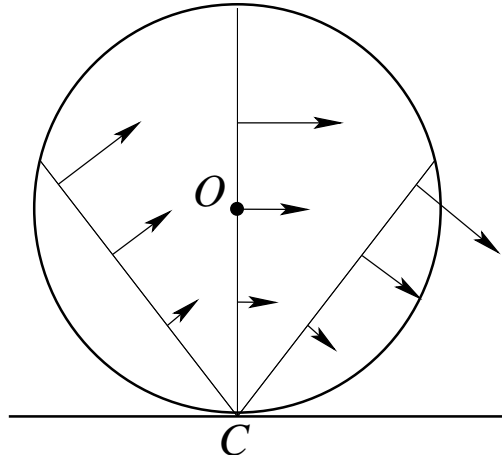


Figura 6.10. La distribuzione della velocità dei punti della ruota che rotola senza strisciare su una rotaia corrisponde a quella di una rotazione istantanea intorno al punto C di contatto col terreno, che ha velocità nulla.

libere. Si dice che il sistema ha n gradi di libertà, e la superficie descritta dai vincoli viene detta *spazio delle configurazioni* del sistema.

6.2.2 Vincoli anolonomi

Le relazioni di vincolo possono anche coinvolgere le velocità dei punti, come passiamo ad illustrare con qualche esempio.

Esempio 6.13: *Il vincolo di puro rotolamento.* Il caso tipico è quello della ruota appoggiata sul terreno, o su una rotaia. Ciò che realizza il vincolo in questo caso è l'attrito, che si suppone forte quanto basta per non consentire alla ruota di strisciare, sicché il moto deve essere di puro rotolamento. La reazione vincolare si traduce cinematicamente nel fatto che la velocità del punto di contatto è nulla: scriveremo $\mathbf{v}_C = 0$, ove \mathbf{v}_C è la velocità del punto C . Come esempi analoghi possiamo citare una sfera che rotola senza strisciare sul pavimento, l'ingranaggio, che idealmente altro non è che una coppia di ruote a contatto in un punto col vincolo che i due punti a contatto abbiano la stessa velocità (o, equivalentemente che sia nulla la velocità relativa dei due punti), oppure la carrucola.

Come si vede nell'esempio, i vincoli di puro rotolamento hanno tipicamente la forma $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = 0$, dove \mathbf{x} è il vettore che dà la posizione di un punto in \mathbb{R}^n , e dunque descrive la configurazione di tutto il sistema, e $\boldsymbol{\varphi}$ è una funzione vettoriale dipendente dal vincolo. Ora, può ben accadere che l'espressione sopra sia in realtà la derivata temporale di una funzione, ossia che valga $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \frac{df}{dt}(\mathbf{x})$, dove f dipende solo dalla posizione del punto. È questo il caso della ruota vincolata a muoversi su una rotaia, come illustrato in dettaglio nell'esempio 6.14, più avanti. In tal caso il vincolo è in realtà olonomo, potendosi scrivere nella forma $f(\mathbf{x}) - c = 0$ con un'opportuna costante c . Si parla invece di vincolo *anolonomo* se non ci si può ricondurre ad una funzione della sola posizione. Gli esempi classici sono la ruota che non è vincolata ad una rotaia, ma può andare ovunque (ad esempio la ruota di un monopattino o la moneta che rotola

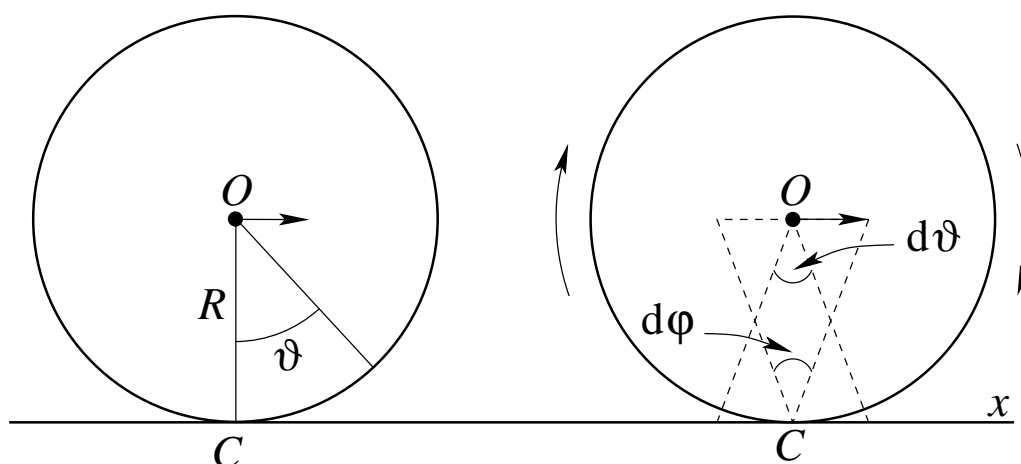


Figura 6.11. A sinistra: la posizione della ruota può identificarsi con la coordinata orizzontale x del suo centro. L'angolo di rotazione ϑ dipende da x , come spiegato nel testo. A destra: Una rotazione di un angolo $d\varphi$ della ruota attorno al suo centro di istantanea rotazione corrisponde ad una rotazione di un angolo $-d\vartheta$ rispetto al centro della ruota, e ad uno spostamento $dx = R d\vartheta$ del centro.

sul pavimento) o la sfera che rotola senza strisciare. La proprietà di anolonomia del vincolo si traduce nel fatto che pur di manovrare correttamente si può parcheggiare il monopattino in qualunque punto del marciapiede, anche senza sollevarlo da terra e senza farlo strisciare, mentre un tram può arrivare solo dove ci sono le rotaie (salvo deragliamenti). In altre parole, il vincolo non si traduce nell'impossibilità di raggiungere alcune configurazioni, ma solo nel legame tra posizioni e velocità: Il modulo della velocità può essere arbitrario, ma la sua direzione è accoppiata alla posizione.

Esempio 6.14: *La ruota sulla rotaia rettilinea.* Discutiamo in dettaglio questo caso, semplice ma significativo. Concentriamoci anzitutto sulla condizione di vincolo $\mathbf{v}_C = 0$. Con un po' di riflessione il lettore si renderà conto che la distribuzione della velocità dei punti della ruota è quella di un sistema rigido che ruota istantaneamente intorno al punto C di contatto con la rotaia, come illustrato in figura 6.10, e non intorno al centro della ruota, come ingenuamente si sarebbe portati a pensare.¹¹ Il punto C è detto *centro di istantanea rotazione*. Non stupisca il fatto che il punto C non possa stare permanentemente fermo: la sua velocità è istantaneamente nulla, ma non la sua accelerazione. In effetti, il punto istantaneamente fermo deve pensarsi come un punto geometrico (quello di contatto della ruota con la rotaia) che cambia da istante ad istante, e non come un punto della ruota. Aggiungendo qualche istante di riflessione il lettore si renderà anche conto che per descrivere la posizione delle ruota basta assegnare ad esempio la coordinata orizzontale del centro della ruota, che

¹¹ Ad esempio, si vede bene che il punto superiore della ruota deve muoversi con velocità doppia rispetto al centro: un fenomeno che si osserva immediatamente se si cerca di spostare una cassa voluminosa e pesante facendola scorrere su di un rullo. La cassa è vincolata a muoversi con il punto superiore del rullo, e non con il suo centro.

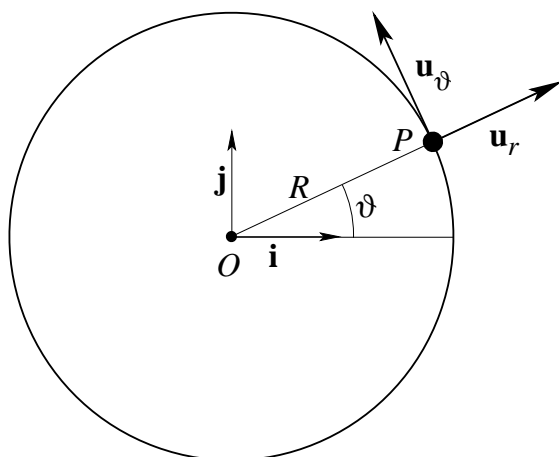


Figura 6.12. Ad illustrazione del problema del punto vincolato ad una circonferenza.

indicheremo con x (e che in effetti è quanto ci interessa in pratica), e che tra la velocità \dot{x} del centro della ruota e l'angolo ϑ disegnato in figura 6.10 sussiste la relazione¹² $\dot{x} + R\dot{\vartheta} = 0$, come illustrato in figura 6.11. Tale relazione si integra facilmente, e si ottiene $x + R\vartheta = \text{costante}$, che è la forma di un vincolo olonomo.

6.2.3 Reazioni vincolari e vincoli perfetti

Iniziamo con qualche considerazione sulla dinamica. Dobbiamo anzitutto convincerci che per descrivere la dinamica di un sistema vincolato occorre tener conto, accanto alle forze note che chiameremo *forze attive*, anche di forze incognite che prendono il nome di *reazioni vincolari*. Al fine di comprendere cosa si intende facciamo ricorso al seguente

Esempio 6.15: *Trattazione elementare del punto vincolato ad una circonferenza.* Consideriamo un punto materiale vincolato a muoversi senza attrito su una guida circolare di raggio R posta nel piano orizzontale (il che, nel linguaggio dei testi di Meccanica Razionale, significa che sul punto non agisce la forza peso). Il moto sulla guida è evidentemente incompatibile con quello di un punto non soggetto a forze, che sarebbe rettilineo uniforme. Perché il punto possa seguire la guida deve essere soggetto ad un'accelerazione, e dunque, se accettiamo l'impostazione newtoniana della Meccanica, deve esserci una forza che agisce sul punto, che denoteremo con Φ . Scriveremo dunque l'equazione di Newton accanto alla relazione che esprime il vincolo, ovvero il sistema di equazioni

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \Phi, \quad x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

¹² Facendo riferimento alla figura 6.11, in un tempo infinitesimo dt il centro O della ruota si sposta verso destra di un tratto $dx = \dot{x} dt$. Nello stesso tempo il segmento che congiunge il punto C col centro O ruota verso destra di un angolo $d\varphi = dx/R$. Rispetto al centro della ruota questa rotazione viene vista come una rotazione di un angolo $d\vartheta = -d\varphi$, in senso opposto. Dunque $R d\vartheta = -R d\varphi = dx = \dot{x} dt$, che è quanto asserito.

dove $\mathbf{x} = (x, y)$ è il vettore che identifica la posizione del punto e $\Phi = (\Phi_x, \Phi_y)$ è la reazione vincolare, che compare anch'essa come incognita. Dunque, abbiamo un sistema di tre equazioni nelle quattro incognite x, y, Φ_x, Φ_y , che resta indeterminato. Il procedimento elementare per risolvere il sistema è illustrato in figura 6.12. Si proietta l'equazione di Newton sulle direzioni radiale e trasversale, identificate dai due vettori $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\vartheta$, e si ottengono le equazioni¹³ $-mR\dot{\vartheta}^2 = \Phi_r$, $mR\ddot{\vartheta} = \Phi_\vartheta$. Qui si vede bene come il sistema sia indeterminato per eccesso di incognite, e non possa risolversi se non imponendo qualche condizione sulla reazione vincolare. Si assume allora che la reazione sia ortogonale al vincolo, e dunque puramente radiale, sicché $\Phi_\vartheta = 0$. Il sistema risulta così separato, avendosi $-mR\dot{\vartheta}^2 = \Phi_r$, $mR\ddot{\vartheta} = 0$. La seconda equazione rappresenta un moto circolare uniforme, $\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t$, dove ϑ_0 e ω sono rispettivamente l'angolo e la velocità angolare iniziale. Per sostituzione nella prima equazione si ricava $\Phi_r = -m\omega^2 R$, il che esprime il fatto che la reazione vincolare deve bilanciare la forza centrifuga.

Esercizio 6.2: Seguendo la traccia dell'esempio 6.15 discutere il caso in cui la circonferenza sia nel piano verticale, ossia il punto materiale sia soggetto alla forza peso. È il modello del *pendolo piano*.

L'esempio (e l'esercizio) appena discussi mostrano come in generale si possa sperare di risolvere il problema dinamico, e dunque di determinare le reazioni vincolari (con qualche ipotesi aggiuntiva), a condizione di saper determinare il movimento. A tal fine occorre scrivere delle equazioni che non contengano le reazioni vincolari.¹⁴ Il formalismo lagrangiano raggiunge questo obiettivo sfruttando la geometria, proprio grazie al fatto che le relazioni che definiscono i vincoli olonomi determinano una superficie descrivibile con coordinate libere locali, e che in ogni punto ammette uno spazio tangente con una struttura di prodotto interno. Prima però di entrare nella discussione sulle equazioni di Lagrange occorre enunciare in forma generale le ipotesi sui vincoli, che chiameremo ipotesi di *vincoli ideali* o *vincoli perfetti*. Questa ipotesi ci consentirà di scrivere le equazioni del moto in una forma che non contiene le reazioni vincolari.

Veniamo ora alla discussione in termini generali. Consideriamo un sistema di N punti di coordinate $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$, e rappresentiamo la configurazione dell'intero sistema mediante un solo punto $\mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_N, y_N, z_N)$ in uno spazio eu-

¹³ I vettori $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\vartheta$ si scrivono sulla base cartesiana $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y$ come $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_x \cos \vartheta + \mathbf{u}_y \sin \vartheta$ e $\mathbf{u}_\vartheta = -\mathbf{u}_x \sin \vartheta + \mathbf{u}_y \cos \vartheta$. Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\vartheta}(-\mathbf{u}_x \sin \vartheta + \mathbf{u}_y \cos \vartheta) = \dot{\vartheta} \mathbf{u}_\vartheta, \quad \dot{\mathbf{u}}_\vartheta = \dot{\vartheta}(-\mathbf{u}_x \cos \vartheta - \mathbf{u}_y \sin \vartheta) = -\dot{\vartheta} \mathbf{u}_r.$$

Il vettore posizione del punto P può scriversi $\mathbf{x} = R\mathbf{u}_r$. Ricordando che il vincolo impone che R sia costante si calcola $\dot{\mathbf{x}} = R\dot{\mathbf{u}}_r = R\dot{\vartheta}\mathbf{u}_\vartheta$, e derivando una seconda volta $\ddot{\mathbf{x}} = -R\ddot{\vartheta}\mathbf{u}_r + R\dot{\vartheta}^2\mathbf{u}_\vartheta$, il che fornisce le componenti radiale e trasversale dell'accelerazione da utilizzarsi per la scrittura dell'equazione di Newton.

¹⁴ Nei trattati classici si usa l'espressione "scrivere delle equazioni pure", ossia libere da vincoli

clideo \mathbb{R}^{3N} . Supponiamo che il sistema sia soggetto a r vincoli olonomi indipendenti¹⁵ della forma

$$(6.24) \quad f_1(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \dots, \quad f_r(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Per ogni t fissato consideriamo la superficie M_t definita da queste relazioni. Denotiamo poi con $\Phi = (\Phi_{1,x}, \Phi_{1,y}, \Phi_{1,z}, \dots, \Phi_{N,x}, \Phi_{N,y}, \Phi_{N,z})$ le reazioni vincolari che agiscono su ciascun punto.

Definizione 6.3: Diremo che il sistema è soggetto a vincoli olonomi perfetti se per ogni punto $\mathbf{x} \in M_t$ il vettore Φ delle reazioni vincolari è ortogonale allo spazio tangente alla superficie M_t .

La condizione richiesta dalla definizione può esprimersi ricorrendo alle coordinate locali su M_t . Ricordiamo che il sistema ha n gradi di libertà, ossia la superficie M_t ha dimensione $n = 3N - r$. Consideriamo una carta locale definita dalle funzioni

$$(6.25) \quad x_j = x_j(q_1, \dots, q_n, t), \quad j = 1, \dots, 3N.$$

Allora la condizione di vincoli perfetti si scrive

$$(6.26) \quad \Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Per comprendere il significato meccanico di questa discussione iniziamo col considerare il caso di vincoli indipendenti dal tempo. Dato un qualsiasi movimento $\mathbf{x}(t)$ del sistema si ha che ad ogni istante t la velocità $\mathbf{v}(t)$ è un vettore dello spazio tangente $T_{\mathbf{x}(t)}M$. Possiamo allora leggere la condizione (6.26) nel modo seguente: per ogni $\mathbf{x} \in M$ e per ogni $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}M$ deve valere $\Phi \cdot \mathbf{v} = 0$. Tale condizione viene espressa dicendo che la potenza delle reazioni vincolari deve essere nulla per tutte le velocità compatibili coi vincoli, o equivalentemente che le reazioni vincolari non devono compiere lavoro per movimenti compatibili coi vincoli.

Nel caso di vincoli dipendenti dal tempo si introduce una complicazione sgradevole, ma necessaria: per ogni istante t si devono considerare le velocità compatibili coi vincoli pensati come bloccati, e non le velocità di un movimento reale che deve tener conto anche dello spostamento dei vincoli.¹⁶

¹⁵ La condizione di indipendenza è ancora la (6.6), ossia che il determinante Jacobiano delle funzioni abbia rango r . Ciò deve valere per ogni t .

¹⁶ Nei trattati classici di Meccanica Razionale si introduce solitamente il concetto di *spostamenti virtuali*, che spieghiamo brevemente. Si consideri il sistema in una configurazione q_1, \dots, q_n , e si pensi ad un piccolo spostamento dq_1, \dots, dq_n . Nello spazio euclideo \mathbb{R}^{3N} questo si traduce in uno spostamento, a t fissato, che viene denotato con

$$(*) \quad \delta \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} dq_j.$$

Questa espressione si trova facilmente calcolando il differenziale della (6.25), ove si ponga $dt = 0$. Di fatto, gli spostamenti $\delta \mathbf{x}$ così definiti sono i vettori dello spazio tangente

Resta da discutere la ragionevolezza dell'ipotesi di vincoli perfetti, o, come si è visto, di vincoli che non compiono lavoro. A tal fine si possono considerare tre casi.

- (i) *Vincolo perfettamente liscio*. Ci si riconduce essenzialmente ad un punto che si muove su una superficie scivolando senza nessun attrito. Come si vede, non è un'ipotesi sostanzialmente diversa dal considerare, ad esempio, oggetti che si muovono nel vuoto, ignorando l'attrito dell'aria. In questa categoria possono rientrare anche meccanismi a scorrimento.
- (ii) *Vincolo di rigidità*, illustrato in figura 6.13. Mantendosi nell'ambito delle ipotesi classiche sulle forze si suppone che due punti vincolati rigidamente esercitino l'uno sull'altro una forza di tipo centrale. Dette $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ le posizioni dei due punti, e scrivendo il vincolo di rigidità nella forma $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2 = d^2$, dove d è la lunghezza dell'asta si vede che ci si riconduce di fatto ad un vincolo olonomo, perché l'equazione del vincolo può pensarsi come descrivente una superficie nello spa-

$T_{\mathbf{x}(q_1, \dots, q_n)} M_t$. Ora, il fatto che le coordinate generalizzate q_1, \dots, q_n possano muoversi in un aperto senza essere soggette a vincoli comporta che gli spostamenti dq_1, \dots, dq_n siano arbitrari. Ciò non è vero invece per uno spostamento $d\mathbf{x}$ nello spazio \mathbb{R}^{3N} : in virtù delle condizioni di vincolo (6.24) esso deve soddisfare, per t fissato, il sistema di equazioni $\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} dx_k = 0$ per $j = 1, \dots, r$. In altre parole, gli spostamenti ammessi devono essere tali che il corrispondente incremento delle funzioni f_1, \dots, f_r sia nullo, avendo fissato $dt = 0$, e la notazione apparentemente bizzarra $\delta\mathbf{x}$ invece di quella più spontanea $d\mathbf{x}$ serve proprio a caratterizzare gli spostamenti che soddisfano queste condizioni. Ad essi si fa riferimento quando si parla di *spostamenti virtuali*, che sono tutti e soli quelli che si possono scrivere nella forma (*) data sopra. I vincoli perfetti vengono definiti come quelli che compiono lavoro elementare nullo per gli spostamenti virtuali, ossia per i quali vale $\Phi \cdot \delta\mathbf{x} = 0$ (il prodotto interno è quello euclideo in \mathbb{R}^{3N}).

A prima vista sembrerebbe potersi affermare che gli spostamenti virtuali coincidono con gli spostamenti risultanti da movimenti arbitrari compatibili coi vincoli. Ma c'è una sottile differenza tra vincoli fissi (indipendenti dal tempo) e vincoli mobili (dipendenti dal tempo). In effetti, si pensi ad un movimento $q_1(t), \dots, q_n(t)$ qualsiasi. In un piccolo intervallo di tempo dt le coordinate generalizzate vengono incrementate di $dq_1 = \dot{q}_1 dt, \dots, dq_n = \dot{q}_n dt$, dove le velocità generalizzate $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ sono arbitrarie. Ma gli spostamenti $\delta\mathbf{x}$ definiti con la formula (*) coincidono con gli spostamenti reali dovuti al movimento $q_1(t), \dots, q_n(t)$ solo se i vincoli sono fissi. Nel caso di vincoli mobili gli spostamenti reali si dovrebbero scrivere tenendo conto anche dell'incremento del tempo, e dunque, per la (6.25), come $d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} dt = \delta\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} dt$, $j = 1, \dots, n$, dove si vede che la dipendenza esplicita dal tempo introduce un termine aggiuntivo. Si pensi, ad esempio, ad un punto che si muova su una circonferenza di raggio $r(t)$ variabile nel tempo. In un intervallo dt lo spostamento reale del punto è la composizione di un piccolo spostamento trasversale $r(t) d\vartheta$, dove $r(t)$ è il raggio della circonferenza all'istante t e ϑ è la coordinata angolare, e di un piccolo spostamento radiale $\dot{r}(t) dt$ dovuto al fatto che il vincolo trascina con sé il punto. Lo spostamento virtuale è solo $r(t) d\vartheta$, che è esattamente quello ricavato dalla (*). La condizione di vincolo perfetto si riferisce strettamente agli spostamenti virtuali come definiti dalla (*). Nella definizione 6.1 il problema della distinzione tra spostamenti virtuali e spostamenti reali non si presenta, avendo noi imposto l'ortogonalità tra reazioni vincolari e superficie M_t .

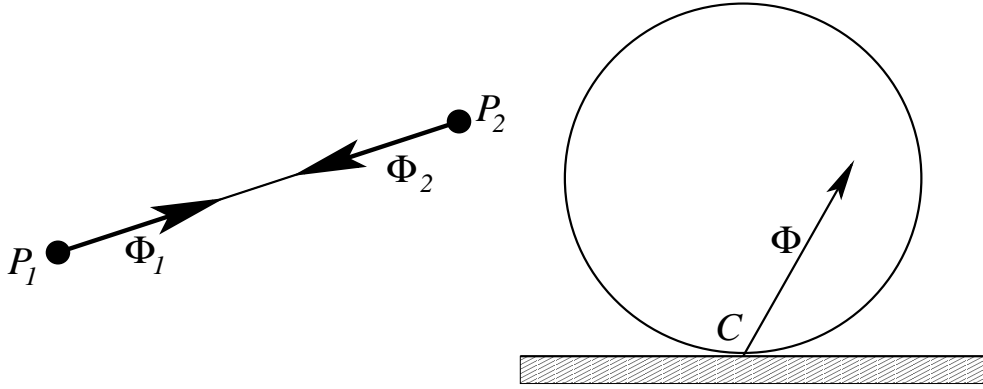


Figura 6.13. Il vincolo di rigidità viene pensato come dovuto a forze interne di tipo classico. Il vincolo scabro per la ruota viene espresso imponendo che la velocità del punto C di contatto tra la ruota ed il terreno sia nulla

zio euclideo \mathbb{R}^6 . Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2 = 2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0.$$

Ricordando il principio di azione e reazione, avremo per le relazioni vincolari $\Phi_1 + \Phi_2 = 0$, e poichè queste, essendo per ipotesi di tipo centrale, sono dirette come $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ avremo $\Phi_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \Phi_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \Phi_1 \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0$, che è di fatto una relazione di ortogonalità tra le reazioni vincolari e la superficie descritta dal vincolo olonomo.

- (iii) *Vincolo perfettamente scabro.* Ci si riconduce ad un attrito generato per contatto, ma abbastanza forte da impedire lo strisciamento. Il caso tipico è quello della ruota, illustrato in figura 6.13: il punto di contatto ha velocità nulla, e dunque la potenza della reazione vincolare è necessariamente nulla. Nel caso di meccanismi in movimento, quali gli ingranaggi, facciamo uso del principio di azione e reazione. Detti A, B i due punti a contatto, scriveremo il vincolo nella forma $\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B = 0$. Per le reazioni vincolari avremo $\Phi_A + \Phi_B = 0$, sicché la potenza delle reazioni vincolari risulta essere $\Phi_A \cdot \mathbf{v}_A + \Phi_B \cdot \mathbf{v}_B = \Phi_A \cdot (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B) = 0$. In questa categoria possono rientrare anche meccanismi quali le cerniere, idealizzate in un vincolo che mantiene fissi tutti i punti di un asse.

6.3 Le equazioni di Lagrange

Veniamo ora al cuore della discussione sul formalismo lagrangiano: la deduzione delle equazioni di Lagrange per sistemi di punti soggetti a vincoli olonomi.

6.3.1 Deduzione delle equazioni

Per ben comprendere il procedimento iniziamo col considerare il caso di un punto nello spazio vincolato ad una superficie bidimensionale M , e supponiamo di aver costruito

una carta locale mediante le funzioni

$$x = x(q_1, q_2) , \quad y = y(q_1, q_2) , \quad z = z(q_1, q_2)$$

con (q_1, q_2) libere di variare in un qualche aperto $U \in \mathbb{R}^2$. Scriviamo l'equazione di Newton nella forma

$$(6.27) \quad m\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F} = \mathbf{\Phi} ,$$

dove \mathbf{F} è la forza attiva, che supponiamo nota, e $\mathbf{\Phi}$ è la reazione vincolare, che è incognita. Dato $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q_1, q_2) \in M$ proiettiamo ortogonalmente l'equazione di Newton sulla base dello spazio tangente $T_{\mathbf{x}}M$; otteniamo così le due equazioni

$$(m\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} = \mathbf{\Phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} , \quad j = 1, 2 .$$

Se ora imponiamo l'ipotesi che la reazione vincolare sia ortogonale alla superficie vediamo che i secondi membri delle equazioni si annullano, sicché ricaviamo le equazioni

$$(m\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} = 0 , \quad j = 1, 2 ,$$

libere da vincoli, come desideravamo. Il problema consiste nello scrivere le equazioni in termini delle sole coordinate libere.

Il procedimento seguito fin qui è estendibile in forma del tutto generale. Supponiamo che sia dato un sistema di N punti con masse m_1, \dots, m_N , che rappresentiamo con un unico punto $\mathbf{x} = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) \in \mathbb{R}^{3N}$, e che questo sistema sia soggetto a r vincoli olonomi indipendenti della forma

$$(6.28) \quad f_1(\mathbf{x}, t) = 0 , \quad \dots , \quad f_r(\mathbf{x}, t) = 0 .$$

Introduciamo $n = 3N - r$ coordinate libere ed una o più carte locali mediante il sistema di $3N$ funzioni

$$(6.29) \quad x_j = x_j(q_1, \dots, q_n, t) , \quad j = 1, \dots, 3N .$$

La scrittura delle equazioni di Newton richiede un piccolo artificio, che del resto ci sarà molto utile più avanti. Introduciamo una matrice diagonale $3N \times 3N$, che denoteremo con \mathbf{G} , definita come

$$(6.30) \quad \mathbf{G} = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \dots, m_N, m_N, m_N) .$$

Potremo allora scrivere l'equazione di Newton nella forma sintetica

$$(6.31) \quad \mathbf{G}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F} = \mathbf{\Phi} ,$$

dove dobbiamo pensare a \mathbf{F} e $\mathbf{\Phi}$ come a vettori in \mathbb{R}^{3N} , costruiti con la convenzione usata sopra per la posizione \mathbf{x} . Si osservi che la (6.31) rappresenta un sistema di $3N$ equazioni, alle quali andranno aggiunte le r equazioni (6.28).

Proiettiamo ora ortogonalmente le equazioni (6.31) sulla base dello spazio tangente $T_{\mathbf{x}}M$ in un generico punto \mathbf{x} . Otterremo

$$(\mathbf{G}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} = \mathbf{\Phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} , \quad j = 1, \dots, n .$$

In virtù dell'ipotesi che i vincoli siano perfetti i secondi membri di queste equazioni si annullano, sicché otteniamo il sistema

$$(6.32) \quad (\mathbf{G}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

ove non compaiono più le reazioni vincolari.¹⁷

Non resta che dare a queste equazioni una forma più esplicita. Isolando il termine contenente la forza definiamo le *forze generalizzate* Q_j come

$$(6.33) \quad Q_j = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Tali quantità potranno essere calcolate senza particolare difficoltà.

Più delicato è il calcolo delle accelerazioni, ma per questo ci viene in aiuto la formula del *binomio lagrangiano*:

Lemma 6.4: Vale

$$(6.34) \quad \mathbf{G}\ddot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

dove $T = \frac{1}{2} \mathbf{G} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ è l'energia cinetica del sistema.¹⁸

Per dimostrare il lemma servono due identità che passiamo a dimostrare separatamente:

Lemma 6.5: Dalle (6.29) seguono le identità

$$(6.35) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

¹⁷ Nei trattati classici la formula (6.32) viene scritta in forma diversa e meno compatta, e precisamente come $\sum_{k=1}^N (m_k \ddot{\mathbf{x}}_k - \mathbf{F}_k) \cdot \delta \mathbf{x}_k = 0$, dove $\delta \mathbf{x}_1, \dots, \delta \mathbf{x}_N$ è uno spostamento virtuale arbitrario dell'intero sistema (si veda la nota 16, poche pagine più indietro, rispetto alla quale qui non abbiamo usato la scrittura compatta per il vettore delle posizioni dei punti). Con le notazioni che usiamo qui, noi scriveremmo questa formula come $(\mathbf{G}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{x} = 0$. A questa formula si dà il nome di *Equazione simbolica della dinamica*, intendendo con questo che pur essendo un'unica equazione essa contiene implicitamente le n equazioni pure del moto. Per ricavare queste ultime si procede anzitutto sostituendo a $\delta \mathbf{x}$ l'espressione (*) della nota 16 e si ottiene $\sum_{j=1}^n (\mathbf{G}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} dq_j$. Poi si fa uso dell'arbitrarietà degli incrementi dq_j per ricavare le n equazioni (6.32). In effetti, essendo gli incrementi arbitrari si può sempre scegliere, ad esempio uno solo dei dq_j non nullo, ponendo a zero tutti gli altri, e questo implica che la j -esima equazione deve essere soddisfatta. Fatto questo, la deduzione delle equazioni di Lagrange prosegue come viene spiegato nel seguito delle note presenti.

¹⁸ L'energia cinetica per un sistema di punti è $T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k$, indipendentemente dal fatto che i punti siano o no vincolati. Il lettore verificherà senza difficoltà che nella notazione compatta in cui $\mathbf{v} = (v_{1,x}, v_{1,y}, v_{1,z}, \dots, v_{N,x}, v_{N,y}, v_{N,z}) \in \mathbb{R}^{3N}$ è il vettore che rappresenta la velocità di tutti i punti e \mathbf{G} è la matrice definita dalla (6.31) l'energia cinetica si scrive proprio nella forma che compare nell'enunciato del lemma.

Dimostrazione. Derivando rispetto al tempo le (6.29) si ricava la formula per le velocità

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} \dot{q}_k ,$$

che è un'espressione lineare nelle velocità generalizzate. Derivando questa rispetto a \dot{q}_j si calcola

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} \delta_{jk} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} ,$$

che è la prima delle identità da dimostrare. Per dimostrare la seconda si calcola

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} \dot{q}_k = \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_j} .$$

Q.E.D.

Dimostrazione del lemma 6.4. Ricordando che $\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{v}}$, si usa anzitutto l'identità

$$(6.36) \quad \mathbf{G}\ddot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{G}\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} \right) - \mathbf{G}\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} .$$

Grazie alle (6.35) si riscrive il membro di destra come

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{G}\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \mathbf{G}\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_j} .$$

Infine si usano le identità

$$\mathbf{G}\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \mathbf{G}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) , \quad \mathbf{G}\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \mathbf{G}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) ,$$

ove si riconosce l'espressione dell'energia cinetica. Grazie ad esse possiamo riscrivere il secondo membro della (6.36) come

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} ,$$

il che dimostra l'asserto.

Q.E.D.

Non resta ora che sostituire le (6.33) e (6.34) nell'equazione (6.32). Abbiamo così dimostrato la

Proposizione 6.6: *La dinamica di un sistema di N punti materiali soggetto a vincoli olonomi, bilateri e perfetti è retta dalle equazioni di Lagrange*

$$(6.37) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j , \quad j = 1, \dots, n ,$$

dove n è il numero di gradi di libertà del sistema, T è l'energia cinetica, e le Q_j sono le forze generalizzate definite dalla (6.33).

6.3.2 Il caso di forze dipendenti da potenziale

Le equazioni di Lagrange possono assumere una forma ancora più semplice quando le forze attive dipendano da potenziale. Riferendoci alle coordinate cartesiane in \mathbb{R}^{3N} ricordiamo che le forze dipendono da potenziale se la potenza delle forze $\Pi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ è la derivata temporale di una funzione, ossia se esiste una funzione $V(\mathbf{x}, t)$ soddisfacente $\Pi = -\dot{V}$. Trasformiamo ora tale relazione introducendo le coordinate lagrangiane. Iniziamo osservando che, grazie all'espressione delle velocità sulla base generata tramite le coordinate locali, si ha

$$\Pi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j .$$

Se ora usiamo l'ipotesi che le forze ammettono potenziale e scriviamo la derivata temporale della funzione $V(\mathbf{x})$ pensando a \mathbf{x} come dipendente dal tempo tramite le q , ovvero tramite le funzioni (6.29) che definiscono la carta, abbiamo

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial V}{\partial t} = \sum_{k=1}^{3N} \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial V}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial V}{\partial t} = - \sum_{j=1}^n \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial V}{\partial t} \\ &= - \sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j + \frac{\partial V}{\partial t} , \end{aligned}$$

e da qui, ricordando che deve essere $\Pi = -\dot{V}$, concludiamo

$$(6.38) \quad Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} , \quad j = 1, \dots, n ,$$

dove intendiamo che l'energia potenziale $V(\mathbf{x}, t)$ debba essere riscritta come funzione di q_1, \dots, q_n , oltre che del tempo t .

Introduciamo ora la funzione *Lagrangiana* L definita come

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t) ,$$

dove si intende che sia l'energia cinetica T che l'energia potenziale V debbano essere espresse in funzione delle coordinate lagrangiane $q = (q_1, \dots, q_n)$, delle velocità generalizzate $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ e del tempo. Osservando che $V(q, t)$ non dipende da \dot{q} , nella (6.37) possiamo sostituire $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ con $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ (si aggiunge 0), e possiamo raccogliere $\frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$ (grazie alla (6.38)). Concludiamo dunque con la seguente

Proposizione 6.7: *La dinamica di un sistema di N punti materiali soggetto a vincoli olonomi, bilateri e perfetti ed a forze attive dipendenti da potenziale è retta dalle equazioni di Lagrange*

$$(6.39) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 , \quad j = 1, \dots, n ,$$

dove $L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$.

È questa la forma delle equazioni di Lagrange usata più di frequente.

6.3.3 La forma generale dell'energia cinetica

Veniamo ora a considerare l'espressione dell'energia cinetica. Nelle coordinate cartesiane dello spazio euclideo \mathbb{R}^{3N} abbiamo, come già abbiamo visto,

$$(6.40) \quad T = \frac{1}{2} \mathbf{G} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} ,$$

dove \mathbf{G} è la matrice diagonale definita dalla (6.29), ossia

$$\mathbf{G} = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, \dots, m_N, m_N, m_N) .$$

Osserviamo prima di tutto che l'espressione dell'energia cinetica è una forma bilineare definita positiva, che può pensarsi derivata da un prodotto interno

$$(6.41) \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{3N} g_{jk} v_j w_k ,$$

dove g_{jk} sono gli elementi della matrice \mathbf{G} e v_j, w_k sono le componenti dei vettori \mathbf{v}, \mathbf{w} sulla base canonica di \mathbb{R}^{3N} . Notiamo che per definizione si ha $g_{jj} > 0$, e $g_{jk} = 0$ per $j \neq k$.

Nelle coordinate locali q_1, \dots, q_n su una superficie M l'energia cinetica assume una forma simile.

Proposizione 6.8: *L'energia cinetica in coordinate libere ha la forma generale di un polinomio non omogeneo di secondo grado nelle velocità, e precisamente*

$$(6.42) \quad T(q, \dot{q}, t) = T_2 + T_1 + T_0 ,$$

con

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n g_{jk}(q, t) \dot{q}_j \dot{q}_k , \quad T_1 = \sum_{j=1}^n b_j(q, t) \dot{q}_j , \quad T_0 = \frac{1}{2} c(q, t) ,$$

dove i coefficienti $g_{jk}(q, t)$, $b_j(q, t)$ e la funzione $c(q, t)$ sono definiti come

$$(6.43) \quad g_{jk} = \mathbf{G} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} , \quad b_j = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} , \quad c = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} .$$

La matrice $g_{jk}(q, t)$ è simmetrica: $g_{jk} = g_{kj}$.

Dimostrazione. Ricordiamo dalla (6.28) che le coordinate libere sono definite mediante un sistema di funzioni $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q, t)$, e che di conseguenza la velocità si scrive

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} .$$

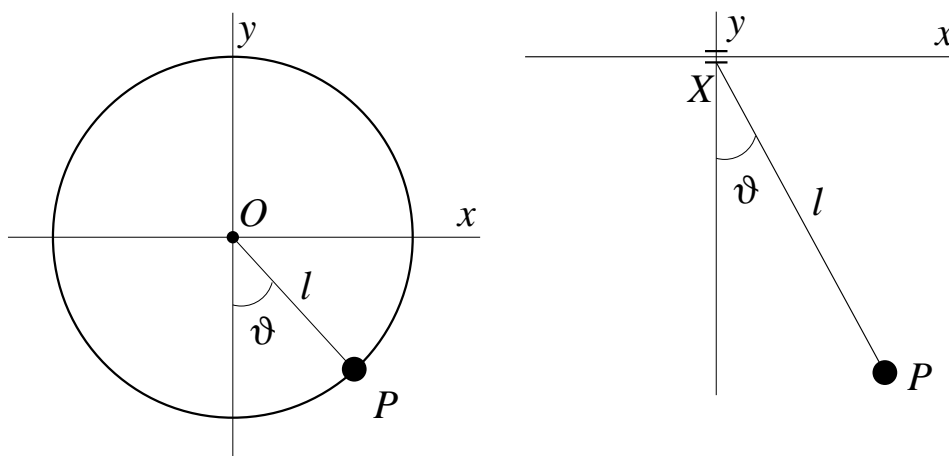


Figura 6.14. A sinistra: il pendolo, rappresentato come un punto vincolato ad una circonferenza di raggio l nel piano verticale. A destra: un pendolo il cui punto di sospensione può muoversi scorrendo senza attrito su una guida orizzontale.

Sostituendo questa espressione in quella dell'energia cinetica in coordinate cartesiane (6.40) si calcola

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \mathbf{G} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right).$$

L'asserto si ottiene semplicemente sviluppando il quadrato e separando i termini di grado rispettivamente 2, 1 e 0 nelle velocità generalizzate \dot{q} . I coefficienti risultano funzioni solo di q e t perché essendo $\mathbf{x}(q, t)$ indipendente dalle velocità anche i vettori $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_j}$ e $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$ non ne dipendono. *Q.E.D.*

Nel caso di vincoli indipendenti dal tempo le funzioni che definiscono la carta possono essere determinate in modo indipendente da t , ovvero $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q)$. In tal caso l'espressione generale dell'energia cinetica si riduce al solo termine T_2 , quadratico nelle velocità.

Se si considera la sola parte quadratica nelle velocità si conclude immediatamente che la matrice $g_{jk}(q, t)$ definisce una metrica sulla superficie M_t (il tempo è da considerarsi fissato). In effetti la forma bilineare $\sum_{j,k=1}^n g_{jk}(q, t) \dot{q}_j \dot{q}_k$ è simmetrica e positiva definita, e dunque definisce un prodotto interno sullo spazio tangente $T_{\mathbf{x}(q,t)} M_t$. La dimostrazione di questa affermazione è una semplice riscrittura di quella della proposizione 6.2, ed è lasciata al lettore. La metrica dell'energia cinetica così introdotta tiene conto della struttura materiale del sistema, ed è detta talvolta *metrica materiale*.

6.3.4 Alcuni esempi

Iniziamo con un esempio del tutto elementare, che abbiamo già avuto modo di discutere più volte.

Esempio 6.16: *Il pendolo.* Schematizziamo il pendolo come un punto vincolato a muoversi su una circonferenza perfettamente liscia nel piano verticale (il che, nel lin-

guaggio tradizionale della Meccanica Razionale, significa che sul punto agisce la forza peso). Denotiamo con l la lunghezza del pendolo, con m la sua massa, e con ϑ l'angolo formato dal filo del pendolo con la verticale, come descritto a sinistra in figura 6.14. Le coordinate del punto P nel sistema di riferimento x, y rappresentato in figura sono $x = l \sin \vartheta$, $y = -l \cos \vartheta$. Da qui, derivando rispetto al tempo e tenendo conto che il solo angolo ϑ dipende dal tempo, ricaviamo $\dot{x} = l\dot{\vartheta} \cos \vartheta$, $\dot{y} = l\dot{\vartheta} \sin \vartheta$, e si calcola l'energia cinetica $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2$. L'energia potenziale della forza peso è proporzionale all'altezza verticale della massa, e si scrive quindi $V = mgy = -mgl \cos \vartheta$. Dunque la Lagrangiana si scrive $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 + mgl \cos \vartheta$. Dividendo per ml^2 si ottiene la Lagrangiana nella sua forma più semplice

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{g}{l} \cos \vartheta .$$

Da qui si ricava l'equazione di Lagrange $\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta$. La dinamica risultante è stata già ampiamente discussa nei paragrafi 4.3.2 e 4.3.6.

Esempio 6.17: *Variazioni sul modello del pendolo.* Una prima variazione si può ottenere considerando un pendolo il cui punto di sospensione possa scorrere senza attrito su una guida orizzontale, come rappresentato a destra in figura 6.14, assumendo che il movimento del punto di sospensione sia una funzione $X(t)$ nota (si pensi all'esempio un po' surreale di un viaggiatore che tiene in mano un pendolo mentre il treno corre sulle rotaie). Si ha qui il caso di un vincolo mobile, perché la posizione (x, y) del pendolo è soggetta alla condizione $(x - X(t))^2 + y^2 - l^2 = 0$. Le coordinate x, y in una configurazione generica del sistema al tempo t si scrivono¹⁹ $x = X(t) + l \sin \vartheta$, $y = -l \cos \vartheta$. La scrittura dell'energia cinetica è ora una faccenda elementare: si calcolano le componenti della velocità $\dot{x} = \dot{X} + l\dot{\vartheta} \cos \vartheta$, $\dot{y} = l\dot{\vartheta} \sin \vartheta$, e si inseriscono nell'espressione dell'energia cinetica in coordinate cartesiane

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + 2l\dot{X}\dot{\vartheta} \cos \vartheta + l^2\dot{\vartheta}^2) .$$

Per il calcolo dell'energia potenziale nulla cambia rispetto all'esempio 6.16, e dunque si ha $V = -mgl \cos \vartheta$. Nella scrittura della Lagrangiana si può ignorare il termine \dot{X}^2 , che dipendendo solo dal tempo non ha alcuna influenza sulle equazioni di Lagrange, e dividere ancora per ml^2 . Si ottiene così

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{l}\dot{X}\dot{\vartheta} \cos \vartheta + \frac{g}{l} \cos \vartheta .$$

¹⁹ Richiamiamo l'attenzione sul fatto che la scrittura dell'energia cinetica e potenziale, e quindi della Lagrangiana, è un procedimento di carattere puramente geometrico: si devono introdurre le coordinate libere necessarie per rappresentare una generica configurazione del sistema. Qui è immediato verificare la correttezza delle formule scritte facendo riferimento alla figura 6.14.

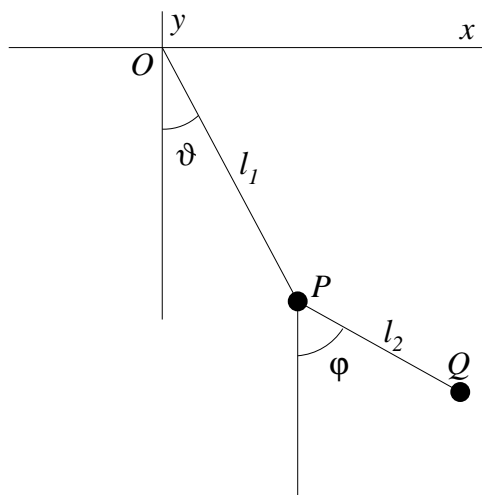


Figura 6.15. Il modello del pendolo doppio.

Veniamo all'equazione di Lagrange. Eseguendo le derivate si calcola

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} &= \frac{d}{dt} \left(\dot{\vartheta} + \frac{1}{l} \dot{X} \cos \vartheta \right) = \ddot{\vartheta} + \frac{1}{l} \ddot{X} \cos \vartheta - \frac{1}{l} \dot{X} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \\ \frac{\partial L}{\partial \vartheta} &= -\frac{1}{l} \dot{X} \dot{\vartheta} \sin \vartheta - \frac{g}{l} \sin \vartheta .\end{aligned}$$

L'equazione assume dunque la forma

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta - \frac{1}{l} \ddot{X} \cos \vartheta$$

(si ricordi che $X(t)$ è funzione nota del tempo, e dunque tale è anche $\ddot{X}(t)$). Si vede dunque come la mobilità del punto di sospensione faccia comparire nell'equazione un termine aggiuntivo che tiene conto della dipendenza temporale del vincolo. Ad esempio, si possono considerare i casi in cui il punto di sospensione si muova di moto uniforme, $X(t) = ct$, oppure di moto uniformemente accelerato $X(t) = \frac{1}{2}ct^2$. Nel primo caso il termine aggiuntivo scompare (se il treno si muove di moto rettilineo uniforme il moto del pendolo non viene modificato). Nel secondo caso l'equazione diventa

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta - \frac{c}{l} \cos \vartheta .$$

La discussione qualitativa del movimento viene lasciata al lettore come esercizio, con il suggerimento di studiare accuratamente le soluzioni di equilibrio.

Una seconda variazione consiste nel supporre che il punto di sospensione possa muoversi sull'asse verticale anziché su quello orizzontale, ovvero che la coordinata $Y(t)$ del punto di sospensione sia una funzione nota del tempo (anche qui, la situazione un po' surreale di una persona che prende l'ascensore tenendo in mano un pendolo). Il calcolo è simile a quello svolto sopra. Il lettore potrà svolgerlo per esercizio, considerando i casi in cui l'ascensore si muova a velocità uniforme o uniformemente accelerata (l'ascensore in caduta libera!).

Esempio 6.18: *Il pendolo doppio.* Una variazione sul tema del pendolo, che a prima vista può apparire già notevolmente complessa, è costituita dal pendolo doppio, rappresentato in figura 6.15: Nel piano verticale, un punto P di massa m_1 è vincolato a muoversi su una circonferenza di raggio l_1 e centro O ; un secondo punto Q di massa m_2 è vincolato a muoversi su una circonferenza di centro P e raggio l_2 . Ambedue le circonferenze sono perfettamente lisce. La sola difficoltà del problema consiste nel trovare una coppia di coordinate libere. Cominciamo con lo scrivere i vincoli. Denotando rispettivamente con x_1, y_1 e con x_2, y_2 le coordinate cartesiane dei punti P e Q , avremo $x_2^2 + y_2^2 - l_2^2 = 0$, $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_1^2 = 0$. Procediamo alla scelta delle coordinate libere:²⁰ useremo gli angoli ϑ e φ rappresentati in figura 6.15. Scriviamo le funzioni che costituiscono la carta:

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \sin \vartheta, & x_2 &= l_1 \sin \vartheta + l_2 \sin \varphi, \\y_1 &= -l_1 \cos \vartheta, & y_2 &= -l_1 \cos \vartheta - l_2 \cos \varphi.\end{aligned}$$

A questo punto la scrittura della Lagrangiana è solo questione di pazienza. Si derivano rispetto al tempo le espressioni sopra:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= l_1 \dot{\vartheta} \cos \vartheta, & \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\vartheta} \cos \vartheta + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\vartheta} \sin \vartheta, & \dot{y}_2 &= l_1 \dot{\vartheta} \sin \vartheta + l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi,\end{aligned}$$

e si sostituiscono nell'espressione dell'energia cinetica in coordinate cartesiane $T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$. Poi si scrive l'energia potenziale delle due masse, in coordinate cartesiane, $V = m_1gy_1 + m_2gy_2$, e vi si sostituiscono le espressioni date sopra per y_1, y_2 . Infine si scrive la Lagrangiana²¹

$$\begin{aligned}L &= \frac{m_1 + m_2}{2}l_1^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{m_2}{2}l_2^2\dot{\varphi}^2 + m_2l_1l_2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\vartheta - \varphi) \\ &\quad + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \vartheta + m_2gl_2 \cos \varphi.\end{aligned}$$

La scrittura delle equazioni di moto è lasciata al lettore, con l'avvertenza che si tratta di un problema non integrabile: inutile accanirsi sulla soluzione delle equazioni. Il problema si potrà riprendere alla luce della discussione sulle piccole oscillazioni, che verrà svolta più avanti. Come esercizio, il lettore potrà anche scrivere la Lagrangiana per una catena di n pendoli. In questo caso potrà risultare molto utile semplificare il problema supponendo che tutti i pendoli abbiano la stessa lunghezza e la stessa massa.

Esempio 6.19: *La superficie toroidale.* Nell'esempio 6.8 abbiamo introdotto il toro \mathbb{T}^n di dimensione n come prodotto cartesiano di n circonferenze, immerso in uno spazio \mathbb{R}^{2n} . Nel caso $n = 2$ si tratta di una superficie bidimensionale immersa in

²⁰ Qui occorre verificare con attenzione che le coordinate siano effettivamente libere (non soggette a vincoli). Si può ragionare così: la posizione del punto P è completamente determinata dalla coordinata ϑ , che può assumere qualunque valore in S^1 (la circonferenza). Supponiamo ora di bloccare ϑ in una configurazione qualsiasi. Allora la coordinata φ determina in modo univoco la posizione del punto Q , ed è libera in quanto può muoversi sull'intera circonferenza. Dunque abbiamo identificato delle buone coordinate.

²¹ Nel calcolo dell'energia cinetica si usa $\cos \vartheta \cos \varphi + \sin \vartheta \sin \varphi = \cos(\vartheta - \varphi)$.

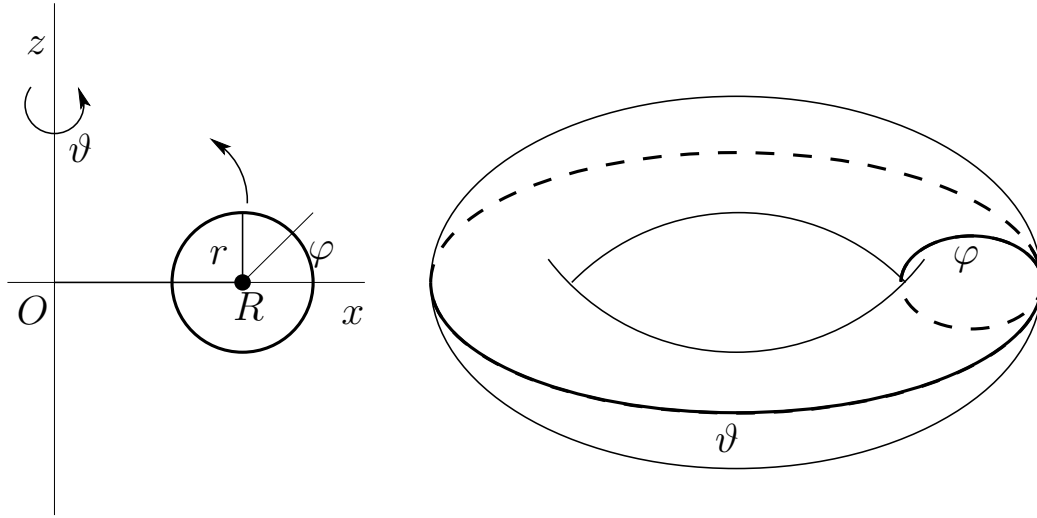


Figura 6.16. Ad illustrazione della costruzione del toro bidimensionale immerso in \mathbb{R}^3 dell'esempio 6.19.

\mathbb{R}^4 . È d'uso anche chiamare toro o superficie toroidale una particolare superficie di rotazione immersa nello spazio tridimensionale.²² Il procedimento costruttivo è illustrato in figura 6.16. In un riferimento cartesiano spaziale si considera una circonferenza nel piano x, z che abbia centro sull'asse x e non intersechi l'asse z ; la chiameremo circonferenza generatrice. Si fa poi ruotare il piano intorno all'asse z . Ne risulta appunto la superficie toroidale che denoteremo con \mathbf{T} , a forma di ciambella o di camera d'aria di una ruota d'automobile. Che tale superficie sia prodotto cartesiano di due circonferenze lo suggerisce il procedimento costruttivo stesso. Vediamo come la si possa dotare di una coppia di coordinate angolari indipendenti.

Siano r il raggio della circonferenza generatrice e R la distanza dall'origine del suo centro, come in figura. Si introducono come coordinate i due angoli ϑ , che descrive la rotazione del centro, e φ che descrive la circonferenza generatrice. Le coordinate cartesiane di un punto generico del toro sono

$$(6.44) \quad x = (R + r \cos \varphi) \cos \vartheta, \quad y = (R + r \cos \varphi) \sin \vartheta, \quad z = r \sin \varphi.$$

La scrittura di queste relazioni è in pratica la sola parte in cui occorre un certo intuito geometrico, ed è tipicamente la parte realmente difficoltosa del formalismo lagrangiano.²³ La trasformazione (6.44) è la parametrizzazione del toro \mathbf{T} , ed iden-

²² Il termine deriva dal latino *torus*-i, il cui significato generico è quello di cuscino o anche rigonfiamento, ad esempio muscolare. L'accezione particolare da cui deriva il termine usato in geometria è di origine architettonica: il toro è la modanatura o cordone convesso che orna la base delle colonne classiche.

²³ Il lettore che trovasse difficoltà a comprendere come si possa costruire la trasformazione di coordinate potrà convincersene come segue. Durante la rotazione il centro della circonferenza viene identificato da un vettore $\mathbf{p} = R\mathbf{u}_r$ dove $\mathbf{u}_r = \cos \vartheta \mathbf{u}_x + \sin \vartheta \mathbf{u}_y$ è un versore che identifica la direzione radiale. Un punto generico della circonferenza ge-

tificando gli angoli (φ, ϑ) con gli angoli che descrivono il prodotto cartesiano di due circonferenze otteniamo una corrispondenza biunivoca fra i due insiemi \mathbb{T}^2 e \mathbf{T} . Precisamente si considera la catena di trasformazioni

$$(\varphi_1, \varphi_2) \xrightarrow{f_1} (x_1, y_1, x_2, y_2) \xrightarrow{h} ((R + rx_1)x_2, (R + rx_1)y_2, ry_1) \xrightarrow{f_2^{-1}} (\varphi, \vartheta)$$

Se indichiamo con f_1, f_2 rispettivamente le parametrizzazioni di \mathbb{T}^2 e \mathbf{T} e con h la corrispondenza fra i sottinsiemi $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^4$ e $\mathbf{T} \subset \mathbb{R}^3$, come indicato nella formula, allora la catena di trasformazioni si scrive semplicemente

$$(\varphi, \vartheta) = f_2^{-1} \circ h \circ f_1(\varphi_1, \varphi_2) .$$

Tale corrispondenza, come facilmente si verificherebbe disponendo di poche nozioni supplementari per le quali rimandiamo al successivo paragrafo 6.5.1 o ai testi citati di geometria differenziale, è un diffeomorfismo fra le due varietà.²⁴ Ma al di là di questi dettagli matematici, che supponiamo definiti, è interessante osservare come oggetti a priori distinti e sistemi meccanici a priori distinti, finiscono in questo modo per avere il medesimo spazio elementare di rappresentazione, o in termini meccanici lo stesso spazio delle configurazioni. Questa opera di astrazione, illustrata qui in un esempio semplice, necessita di un po' di lavoro, ma diventa relativamente spontanea con un po' di esercizio; essa costituisce una grande semplificazione concettuale ed è uno degli elementi fondamentali della meccanica lagrangiana dei sistemi vincolati.

Da questo punto in poi tutto diventa una questione di calcolo. Il lettore potrà verificare per esercizio che il tensore metrico è dato dalla matrice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} (R + r \cos \varphi)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

e che l'energia cinetica di un punto materiale di massa m vincolato a muoversi senza attrito sulla superficie toroidale si scrive

$$T = \frac{1}{2}m[(R + r \cos \varphi)^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2] .$$

Se supponiamo che il punto non sia soggetto ad altre forze, allora la Lagrangiana coincide con l'energia cinetica.

Esercizio 6.3: Scrivere la Lagrangiana per un punto vincolato a muoversi sulla superficie del toro \mathbb{T}^2 immerso nello spazio euclideo \mathbb{R}^4 dell'esempio 6.8.

Nota: il lettore osserverà che la superficie considerata qui è diffeomorfa alla superficie toroidale dell'esempio 6.19, e quindi identificabile con essa come varietà differenziabile, ma ha una metrica ben diversa.

neratrice si ottiene sommando a \mathbf{p} il vettore $\mathbf{p}' = r \cos \varphi \mathbf{u}_r + r \sin \varphi \mathbf{u}_z$, e questo dà la trasformazione di coordinate voluta. Il lettore dovrà riflettere un momento per convincersi che la corrispondenza tra gli angoli ϑ, φ ed i punti della superficie toroidale è biunivoca.

²⁴ Due varietà differenziabili si dicono diffeomorfe quando sono diffeomorfe le loro rappresentazioni locali. In tal caso le due varietà, almeno dal punto di vista del calcolo differenziale, si considerano come identiche.

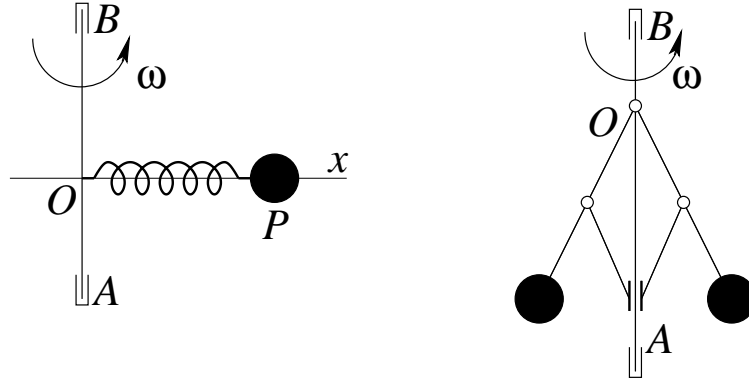


Figura 6.17. Meccanismi a masse centrifughe.

Esercizio 6.4: Scrivere la Lagrangiana per un punto materiale di massa m vincolato a muoversi sulla superficie toroidale dell'esempio 6.19 supponendo che su di esso agisca la forza peso. Come variante il lettore potrà svolgere lo stesso esercizio assumendo che l'asse x sia verticale (la ciambella appoggiata nella posizione di una ruota).

Esempio 6.20: *Meccanismi a masse centrifughe.* Consideriamo il sistema rappresentato a sinistra in figura 6.17: un punto P di massa m può scorrere senza attrito su un asse orizzontale che a sua volta ruota intorno ad un asse verticale AB ad una velocità angolare costante ω . Il punto è soggetto alla forza di una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, che è fissata per un estremo all'asse di rotazione. Si chiede di studiare la dinamica al variare di ω , trascurando il fatto che la massa possa attraversare l'asse di rotazione.

Anche qui siamo in presenza di vincoli mobili. Introduciamo un sistema di riferimento ausiliario i cui assi, che denoteremo con ξ, η, ζ , siano fissi, e con l'asse ζ che coincide con l'asse di rotazione. In tal modo l'asse orizzontale su cui scorre la massa si troverà sempre nel piano ξ, η , e la sua direzione potrà identificarsi con un angolo ϑ . Poiché la rotazione intorno all'asse è supposta uniforme scriveremo senz'altro $\vartheta(t) = \omega t$. Potremo allora identificare la posizione della massa nel piano ξ, η ricorrendo a coordinate polari:

$$\xi = x \cos \omega t, \quad \eta = x \sin \omega t,$$

dove x è la posizione della masse sull'asse ruotante. Il calcolo dell'energia cinetica è semplice. Si derivano rispetto al tempo le due relazioni sopra, e si ottiene

$$\dot{\xi} = \dot{x} \cos \omega t - \omega x \sin \omega t, \quad \dot{\eta} = \dot{x} \sin \omega t + \omega x \cos \omega t.$$

Poi si scrive l'energia cinetica $T = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2)$, e vi si sostituiscono le espressioni appena calcolate. Infine si scrive l'energia potenziale dovuta alla molla, che è $V = \frac{1}{2}kx^2$. Si ottiene così la Lagrangiana del sistema

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) - \frac{1}{2}kx^2.$$

Il termine $m\omega^2 x^2/2$ viene detto *potenziale centrifugo*. Si lascia al lettore come esercizio la scrittura dell'equazione di moto e lo studio qualitativo del movimento.

Esercizio 6.5: Seguendo la traccia dell'esempio 6.20 si provi a scrivere la Lagrangiana del sistema rappresentato a destra in figura 6.17. Si suppone che l'asse di rotazione sia verticale, le masse siano eguali, le aste che formano il meccanismo siano prive di massa e non vi siano attriti.

6.4 Potenziali dipendenti dalla velocità

Fin qui abbiamo considerato forze dipendenti dalla sola posizione, oltre che dal tempo. D'altra parte la restrizione a forze puramente posizionali è palesemente troppo forte per le applicazioni fisiche.

In effetti conosciamo almeno tre situazioni in cui si ha una forza dipendente dalla velocità.

- (i) Il caso dell'attrito, che si verifica ad esempio per corpi che si muovono nell'aria, o nell'acqua, o strisciando su una superficie.
- (ii) Il caso della forza apparente di Coriolis, che si manifesta in sistemi in rotazione.
- (iii) Il caso ancor più interessante di una particella elettricamente carica che si muove in un campo magnetico: detta \mathbf{B} l'intensità del campo magnetico ed e la carica della particella si ha la forza di Lorentz $\mathbf{F} = e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$.

Il caso dell'attrito, in generale, non può rientrare in modo banale nell'ambito del formalismo lagrangiano, perché si tratta di una forza che compie lavoro.

Il caso delle forze apparenti rientra in modo spontaneo in quello dei vincoli dipendenti dal tempo. In effetti il moto del riferimento può scriversi come una dipendenza dal tempo nelle relazioni che danno la posizione di un punto rispetto ad un sistema fisso (che supponiamo di conoscere proprio perché sappiamo che il riferimento che consideriamo è mobile!). In tal caso l'osservazione appropriata è che il formalismo di Lagrange si applica in modo diretto, e quindi nelle equazioni devono comparire automaticamente i termini dovuti alle forze apparenti. Per convincersene si possono riesaminare in questa luce gli esempi 6.17 (il pendolo sospeso ad un punto mobile) e 6.20 (i meccanismi a masse centrifughe).

Il caso della particella carica in movimento in un campo magnetico appare più misterioso, perché la forza di Lorentz evidentemente ha potenza nulla, dal momento che agisce perpendicolarmente alla velocità. Qui vediamo come questo caso rientra proprio nella classe di forze dipendenti dalla velocità per le quali si può scrivere una forma generalizzata di potenziale.

L'osservazione che fa da guida è che nel caso di forze puramente posizionali abbiamo potuto introdurre la funzione Lagrangiana grazie al fatto che le forze generalizzate possono scriversi $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$, che è la (6.38), al quale si è aggiunta l'osservazione elementare che $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$. Se però ripercorriamo il ragionamento svolto nel paragrafo 6.3.2 ci rendiamo conto che per poter scrivere le equazioni di Lagrange nella forma generale della proposizione 6.7 basta che le forze generalizzate possano scriversi come

$$(6.45) \quad Q_j(q, \dot{q}, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} ;$$

si ammette dunque anche una dipendenza delle forze dalla velocità. Questa condizione restringe il campo di ricerca a forze di forma ben particolare:

Proposizione 6.9: *Le forze dipendenti dalla velocità che ammettono un'energia potenziale generalizzata sono della forma*

$$Q_j = Q_j^{(c)}(q, t) + Q_j^{(g)}(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial A_j}{\partial t} ,$$

dove $Q_j^{(c)}(q, t)$ è un campo di forze conservativo, e $Q_j^{(g)}(q, \dot{q}, t)$, detto termine giroscopico, ha la forma

$$Q_j^{(g)}(q, \dot{q}, t) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial A_j}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k ,$$

e $A_1(q, t), \dots, A_n(q, t)$ sono funzioni indipendenti dalla velocità.

Il lettore osserverà che il termine tra parentesi è antisimmetrico:

$$\Gamma_{jk} = \frac{\partial A_j}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_j} = -\Gamma_{kj} ;$$

il termine $k = j$ della somma dà contributo nullo.

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che sia la forza generalizzata che il potenziale devono essere funzioni lineari delle velocità. Ciò si dimostra calcolando

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial t} - \frac{\partial V}{\partial q_k} .$$

Poiché la forza generalizzata non può dipendere dall'accelerazione avremo necessariamente

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} = 0 , \quad j, k = 1, \dots, n ,$$

il che è possibile solo se V dipende linearmente dalla velocità o non ne dipende affatto. Ammesso ciò, la forza generalizzata è data dal resto dell'espressione data sopra, che è anch'esso lineare nelle velocità, come asserito. Scriviamo ora l'energia potenziale generalizzata nella sua forma più generale come

$$V(q, \dot{q}, t) = \sum_{k=1}^n A_k(q, t) \dot{q}_k + \tilde{V}(q, t) .$$

Per la forza generalizzata avremo allora, grazie alla (6.45),

$$\begin{aligned} Q_j &= \frac{d}{dt} A_j - \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_k}{\partial q_j} \dot{q}_k - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_j} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial A_j}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial A_j}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_j} . \end{aligned}$$

Q.E.D.

Nel caso interessante in cui le funzioni $A_1(q), \dots, A_n(q)$ non dipendano dal tempo la forza generalizzata si scompone nei soli termini conservativo e giroscopico.

Corollario 6.10: *Il termine giroscopico delle forze generalizzate ha potenza nulla (ovvero non compie lavoro).*

Dimostrazione. Basta calcolare la potenza di $Q_j^{(g)}$ tenendo conto della forma data dalla proposizione 6.9, ossia

$$\sum_{j=1}^n Q_j^{(g)} \dot{q}_j = \sum_{k,j=1}^n \left(\frac{\partial A_j}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k ,$$

dove la somma si annulla grazie all'antisimmetria del termine tra parentesi. *Q.E.D.*

Esempio 6.21: *La particella in un campo elettromagnetico.* Il problema si enuncia come segue: una particella di massa m e carica elettrica e è libera di muoversi in una regione dello spazio dove sono presenti un campo elettrico \mathbf{E} ed un campo magnetico \mathbf{B} , ed è soggetta alla forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

(dove \mathbf{v} è la velocità della particella). Si chiede di determinare una funzione lagrangiana.

È possibile scrivere la forza di Lorentz come derivante da un potenziale generalizzato dipendente dalla velocità. Ricordiamo infatti che i campi elettrico e magnetico si possono scrivere nella forma

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} , \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

dove Φ e \mathbf{A} sono rispettivamente i potenziali scalare e vettore del campo elettromagnetico. Abbiamo allora

$$\mathbf{F} = -e \text{grad } \Phi + e \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{A} - e \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} .$$

Questa espressione si riconduce alla forma del termine giroscopico della proposizione 6.9 verificando che le componenti di $\mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{A}$ sulla base cartesiana dei versori $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$ sono, rispettivamente,

$$\begin{aligned} v_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) + v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) , \\ v_x \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) + v_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) , \\ v_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + v_y \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) . \end{aligned}$$

Per la proposizione 6.9 concludiamo che l'energia potenziale generalizzata è

$$V = e\Phi + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} .$$

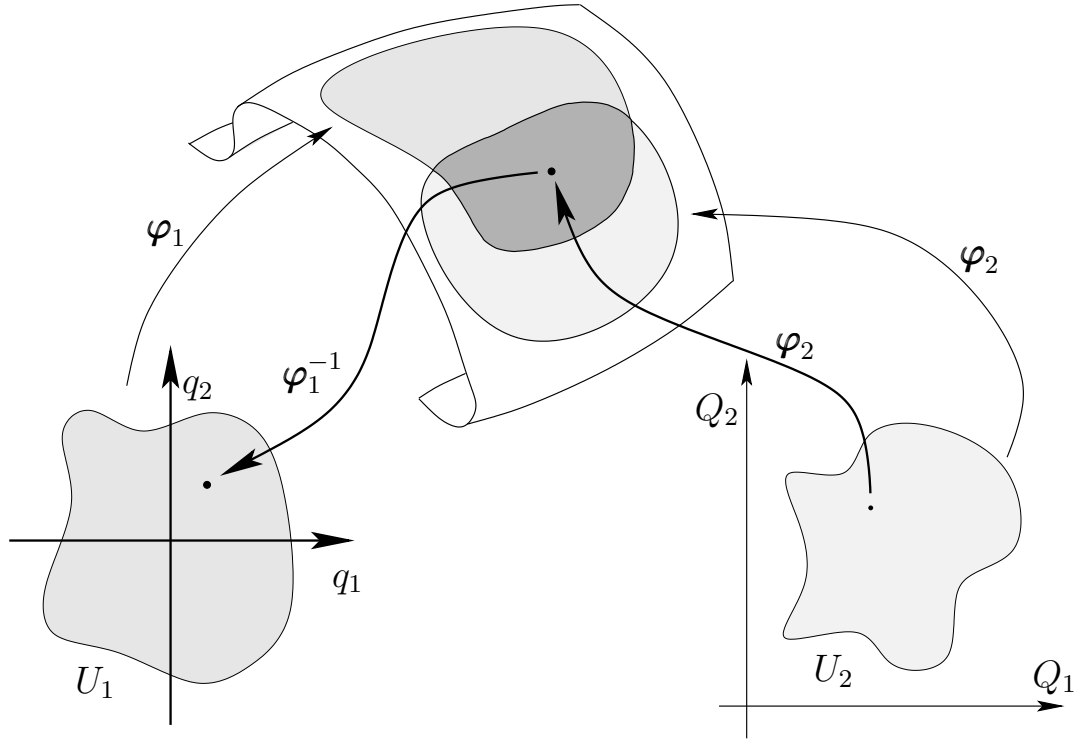


Figura 6.18. La compatibilità delle carte di un atlante. Le immagini degli aperti U_1, U_2 hanno intersezione non vuota. La trasformazione di coordinate tra U_1 e U_2 costruita passando per la superficie deve essere una funzione regolare.

6.5 Sistemi lagrangiani generali

Fin qui abbiamo considerato le equazioni di Lagrange come conseguenza delle equazioni di Newton, o meglio come una formalizzazione di queste ultime in un contesto geometrico generale. A tal fine abbiamo introdotto un sistema di coordinate nello spazio o sulla superficie definita dai vincoli. Se ora riflettiamo un momento ci rendiamo conto che il formalismo che abbiamo introdotto ha una valenza ben più generale. In effetti possiamo rimuovere lo schema newtoniano da cui abbiamo preso le mosse e considerare le equazioni di Lagrange come un sistema dinamico definito su una superficie, o *varietà differenziabile*, a patto di aver assegnato una funzione lagrangiana definita sulla superficie stessa. In questo paragrafo sviluppiamo brevemente questo punto di vista.

6.5.1 La compatibilità delle carte di un atlante.

Premettiamo una breve digressione di carattere geometrico per discutere un punto che nel paragrafo 6.1, dedicato alla geometria delle superfici, avevamo lasciato in ombra: la compatibilità tra le carte di un atlante.

Consideriamo una superficie M di dimensione n immersa in uno spazio \mathbb{R}^N , con $n \leq N$. Supponiamo che su questa superficie siano definite due carte locali $\{\varphi_1, U_1\}$ e $\{\varphi_2, U_2\}$, rispettivamente sugli aperti $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $U_2 \subset \mathbb{R}^n$ (si veda la figura 6.18). Con-

sideriamo poi le immagini $\boldsymbol{\varphi}_1(U_1)$ e $\boldsymbol{\varphi}_2(U_2)$, che sono sottinsiemi di M , e supponiamo che si abbia $\boldsymbol{\varphi}_1(U_1) \cap \boldsymbol{\varphi}_2(U_2) \neq \emptyset$. Consideriamo ora un punto, di cui indicheremo le coordinate con Q_1, \dots, Q_n , nell'aperto U_2 . Mediante la carta $\{\boldsymbol{\varphi}_2, U_2\}$ questo identifica un unico punto $\mathbf{x}(Q_1, \dots, Q_n) \in M$. Se accade che $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\varphi}_1(U_1) \cap \boldsymbol{\varphi}_2(U_2)$ (il che è possibile se l'intersezione tra le immagini delle carte non è vuota) allora tramite la carta $\{\boldsymbol{\varphi}_1, U_1\}$ possiamo determinare un unico punto $(q_1, \dots, q_n) \in U_1$ che è la controimmagine di \mathbf{x} , ossia tale che $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}_1(q_1, \dots, q_n)$.

Con il procedimento descritto abbiamo determinato un sistema di funzioni

$$(6.46) \quad q_1 = q_1(Q_1, \dots, Q_n), \dots, q_n = q_n(Q_1, \dots, Q_n)$$

che ha dominio in $\boldsymbol{\varphi}_2^{-1}(\boldsymbol{\varphi}_1(U_1) \cap \boldsymbol{\varphi}_2(U_2))$ e codominio in $\boldsymbol{\varphi}_1^{-1}(\boldsymbol{\varphi}_1(U_1) \cap \boldsymbol{\varphi}_2(U_2))$, e che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i due domini.²⁵

Diremo che le due carte $\{\boldsymbol{\varphi}_1, U_1\}$ e $\{\boldsymbol{\varphi}_2, U_2\}$ sono compatibili se le funzioni (6.46) e le loro inverse

$$(6.47) \quad Q_1 = Q_1(q_1, \dots, q_n), \dots, Q_n = Q_n(q_1, \dots, q_n)$$

sono differenziabili.²⁶

Ad esempio, possiamo supporre che le funzioni siano di classe C^∞ .

Diremo poi che un atlante su M è un insieme di carte $\{\boldsymbol{\varphi}_\alpha, U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, dove \mathcal{A} è un insieme finito o numerabile di indici, di carte compatibili che copre tutta la superficie M , ossia $M = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \boldsymbol{\varphi}_\alpha(U_\alpha)$.

6.5.2 Lo spazio delle configurazioni e lo spazio degli stati

Nella discussione che abbiamo seguito fin qui la varietà M rappresenta l'insieme di tutte le posizioni che il sistema può assumere, compatibilmente con i vincoli. Ad essa si dà il nome di *spazio delle configurazioni*, descritto da coordinate lagrangiane (o libere) q_1, \dots, q_n .

Per ciascun punto dello spazio delle configurazioni si introduce poi, lo spazio tangente, definendone una base tramite i vettori coordinati ricavati da una carta locale. La velocità del punto si può descrivere allora mediante le componenti $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$, o velocità generalizzate.

²⁵ In altre parole: ci si restringe a considerare l'intersezione delle due immagini su M , e si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le controimmagini di questo insieme sugli aperti U_1, U_2 delle carte. Per ben comprendere il procedimento si guardi con attenzione la figura 6.18. Si passa da $(Q_1, \dots, Q_n) \in U_2$ ad un punto \mathbf{x} sulla superficie, e da questo a $(q_1, \dots, q_n) \in U_1$, ossia si ha $(q_1, \dots, q_n) = \boldsymbol{\varphi}_1^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_2(Q_1, \dots, Q_n)$; il doppio passaggio è garantito se $\mathbf{x} \in \boldsymbol{\varphi}_1(U_1) \cap \boldsymbol{\varphi}_2(U_2)$, e la funzione $\boldsymbol{\varphi}_1^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_2$ è palesemente univoca. Lo stesso vale se si procede in senso inverso, considerando $(Q_1, \dots, Q_n) = \boldsymbol{\varphi}_2^{-1} \circ \boldsymbol{\varphi}_1(q_1, \dots, q_n)$.

²⁶ Se pensiamo all'analogia suggestiva con le carte di un atlante geografico la compatibilità corrisponde al fatto che se uno stesso punto geografico è rappresentato su due carte (ovvero pagine) distinte dell'atlante esiste una corrispondenza ben definita tra la descrizione del punto (e dei suoi dintorni) sulla prima carta e quella della seconda carta.

All'insieme

$$(6.48) \quad TM = \bigcup_{\mathbf{x} \in M} T_{\mathbf{x}}M$$

viene dato il nome di *fibrato tangente* ad M . Esso è parametrizzato dalle coppie²⁷ $(q, \dot{q}) = (q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$. Si vede dunque come il fibrato tangente descriva in modo completo lo stato del sistema, dal momento che le coordinate (q, \dot{q}) determinano in modo univoco la posizione e la velocità. Si usa talvolta il termine *spazio degli stati*.

Fin qui abbiamo solo costruito una rappresentazione geometrica atta a descrivere lo stato del sistema, e se pensiamo assegnate delle funzioni $q_1(t), \dots, q_n(t)$ ne descriviamo la cinematica, essendo le velocità $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ semplicemente le derivate temporali delle coordinate. Veniamo ora alla dinamica.

Diremo che *sullo spazio degli stati è definita una dinamica lagrangiana se è assegnata una funzione $L(q, \dot{q}, t)$ soddisfacente la condizione*²⁸

$$(6.49) \quad \det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right) \neq 0 .$$

La dinamica è retta dalle equazioni di Lagrange, che riscriviamo:

$$(6.50) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n .$$

Nel caso della Meccanica dei sistemi di punti soggetti a vincoli olonomi e perfetti la funzione Lagrangiana è definita come $L = T - V$. A questi sistemi daremo il nome di *sistemi naturali*. D'altro canto possiamo ben considerare una funzione lagrangiana non degenera, anche non della forma naturale $L = T - V$; a questa è comunque associato il sistema delle equazioni differenziali di Lagrange, e quindi una dinamica, che non ha necessariamente un'interpretazione meccanica. Esempi di sistemi di questo tipo si hanno quando si tratta il calcolo delle variazioni.

Lemma 6.11: *I sistemi naturali soddisfano sempre la condizione (6.49).*

²⁷ Da qui si intuisce che il fibrato tangente TM ha anch'esso un atlante costituito da carte e quindi una struttura astratta che lo rende simile ad una superficie con coordinate locali $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ indotte da quelle della superficie M . Tuttavia non è evidente se ed in che senso esso possa essere immerso in uno spazio euclideo, e questo fa nascere spontaneamente l'esigenza di riformulare la geometria delle superfici in un modo più astratto, senza riferimenti all'immersione in uno spazio ambiente. Non ci occupiamo qui di questo aspetto, per il quale rimandiamo ai testi di Geometria Differenziale.

²⁸ Si intende il determinante della matrice Hessiana i cui elementi sono le derivate seconde della funzione Lagrangiana rispetto alle velocità generalizzate. Si intende anche che la condizione debba valere per tutti i punti q e tutti i tempi t considerati. Come si vedrà più sotto, si tratta di una condizione di invertibilità che assicura la possibilità di riscrivere le equazioni di Lagrange risolte rispetto alla derivata di ordine massimo.

Dimostrazione. Grazie alla forma generale dell'energia cinetica stabilita dalla proposizione 6.8, si calcola subito

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} = g_{jk} .$$

Abbiamo già mostrato che questa matrice definisce una forma quadratica definita positiva, e quindi non può essere degenere. Q.E.D.

6.5.3 Proprietà di invarianza delle equazioni di Lagrange

Veniamo ora al problema di come cambiano le equazioni di Lagrange quando si effettua un cambio di carta locale, eventualmente anche dipendente dal tempo. In altre parole, supponiamo che sia assegnato un cambiamento locale di coordinate tramite n funzioni

$$(6.51) \quad q_1 = q_1(Q_1, \dots, Q_n, t) , \dots , q_n(Q_1, \dots, Q_n, t) ,$$

che si suppongono regolari (ad esempio di classe C^∞) ed invertibili. Da queste relazioni seguono anche le trasformazioni per le velocità generalizzate

$$(6.52) \quad \dot{q}_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \dot{Q}_k + \frac{\partial q_j}{\partial t} , \quad j = 1, \dots, n ,$$

dove compare la matrice Jacobiana della trasformazione, che deve soddisfare

$$(6.53) \quad \det \left(\frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \right) \neq 0 ,$$

in virtù dell'ipotesi di invertibilità. Il problema è come scrivere le equazioni della dinamica nelle nuove coordinate Q_1, \dots, Q_n .

Il modo in cui sono state dedotte le equazioni di Lagrange lascia intuire che esse godano della proprietà di *invarianza in forma per trasformazioni di coordinate*. In effetti vale la

Proposizione 6.12: *Se si effettua un cambiamento di carta dalle vecchie coordinate q_1, \dots, q_n alle nuove coordinate Q_1, \dots, Q_n tramite un sistema di funzioni della forma (6.51) le equazioni di moto nelle nuove variabili assumono ancora la forma di equazioni di Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_j} = 0 , \quad j = 1, \dots, n ,$$

ove la nuova Lagrangiana $\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t)$ è ricavata dalla vecchia $L(q, \dot{q}, t)$ per semplice sostituzione di variabili, ossia

$$\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q, \dot{q}, t) \Big|_{q=q(Q,t), \dot{q}=\dot{q}(Q,\dot{Q},t)} .$$

Dimostrazione. Dalle (6.51) e (6.52), procedendo come per la dimostrazione del lemma 6.5, si ricavano le identità

$$\frac{\partial q_j}{\partial Q_k} = \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_k} , \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} = \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_k} .$$

Per la nuova Lagrangiana $\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t)$ si calcola poi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_k}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} &= \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_k} \right], \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_k} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial Q_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} \right),\end{aligned}$$

ove si sottintende che tutte le funzioni devono essere riscritte in termini delle nuove coordinate e velocità Q, \dot{Q} , oltre che del tempo. Raccogliendo le tre espressioni precedenti e fattorizzando la matrice Jacobiana $\frac{\partial q_j}{\partial Q_k}$ si ottiene infine

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_k} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial Q_k}.$$

Poichè la matrice $\frac{\partial q_j}{\partial Q_k}$ è non singolare, segue che il membro di sinistra si annulla per $k = 1, \dots, n$ se e solo se si annullano tutti i termini $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}$ al secondo membro. Dunque le equazioni di Lagrange per \tilde{L} sono soddisfatte se e solo se sono soddisfatte le equazioni di Lagrange per L . Q.E.D.

È interessante anche mettere in evidenza una proprietà di invarianza delle equazioni di Lagrange rispetto a modifiche della funzione Lagrangiana.

Proposizione 6.13: Sia $c \in \mathbb{R}$ non nullo, e sia $F(q, t)$ una funzione (regolare) arbitraria. Allora le equazioni di Lagrange per le funzioni

$$cL(q, \dot{q}, t), \quad L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF}{dt}$$

coincidono con le equazioni per L .

Dimostrazione. Per $cL(q, \dot{q}, t)$ l'affermazione è evidente, perché la costante si fattorizza nelle equazioni di Lagrange. Per la seconda funzione basta mostrare che il contributo di $L_1 = \frac{dF}{dt}$ alle equazioni di Lagrange si annulla. A tal fine si osservi che

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t},$$

e dunque

$$\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial F}{\partial q_j}.$$

Si calcola allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{dF}{dt} = \frac{\partial L_1}{\partial q_j}, \end{aligned}$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L_1}{\partial q_j} = 0.$$

Q.E.D.

La proposizione che abbiamo appena dimostrato mostra come Lagrangiane distinte possano generare la stessa dinamica.

6.6 Forma generale delle equazioni di Lagrange

Supponiamo che sia assegnata una funzione Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, soddisfacente la condizione (6.49). Vogliamo esaminare la forma delle equazioni di Lagrange, e soprattutto se esse possano scriversi in forma normale, ossia risolte rispetto alla derivata di ordine massimo. Tale forma infatti è quella utile al fine di applicare la teoria sulle equazioni differenziali che conosciamo.

Lemma 6.14: *Per un sistema generale le equazioni di Lagrange producono un sistema di equazioni del secondo ordine della forma*

$$(6.54) \quad \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = \psi_j(q, \dot{q}, t), \quad j = 1, \dots, n,$$

dove

$$\psi_j(q, \dot{q}, t) = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_j}.$$

Dimostrazione. Basta calcolare

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial t}$$

ed aggiungere il termine mancante $\frac{\partial L}{\partial q_j}$.

Q.E.D.

Si vede qui come il primo membro delle equazioni assuma la forma di espressione lineare nelle derivate seconde \ddot{q} , con una matrice che dipende da q, \dot{q}, t . La condizione (6.49) assicura che il sistema possa essere risolto rispetto a \ddot{q} . Si può dunque applicare la teoria nota, in particolare il teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali. Si ha così la

Proposizione 6.15: *Per un sistema Lagrangiano generale, soddisfacente la condizione (6.49), le equazioni di Lagrange determinano univocamente il movimento.*

È interessante anche considerare il caso di sistemi naturali soggetti a vincoli perfetti e bilateri, ma non soddisfacenti le condizioni di esistenza dell'energia potenziale. Per tali sistemi dobbiamo far ricorso alle equazioni di Lagrange nella forma (6.37) della proposizione 6.6, che riscriviamo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Se ricordiamo la forma generale dell'energia cinetica data nella proposizione 6.8, ossia $T_2 + T_1 + T_0$ con

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n g_{kl}(q,t) \dot{q}_k \dot{q}_l, \quad T_1 = \sum_{k=1}^n b_k(q,t) \dot{q}_k, \quad T_0 = \frac{1}{2} c(q,t),$$

possiamo scrivere una forma un po' più esplicita per le equazioni. In effetti abbiamo²⁹

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{k=1}^n g_{jk}(q,t) \dot{q}_k, \quad \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} = b_j(q,t).$$

Derivando rispetto al tempo abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_{k=1}^n g_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial g_{jk}}{\partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{jk}}{\partial t} \dot{q}_k \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial b_j}{\partial t}. \end{aligned}$$

Si passa poi a calcolare

$$\frac{\partial T_2}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial g_{kl}}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_l, \quad \frac{\partial T_1}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_k}{\partial q_j} \dot{q}_k, \quad \frac{\partial T_0}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial c}{\partial q_j}.$$

²⁹ Il calcolo della derivata di T_2 si svolge come segue. Si calcola anzitutto

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n g_{kl} (\delta_{jk} \dot{q}_l + \dot{q}_k \delta_{jl}),$$

dove si è usato il simbolo δ di Kronecker. Nel membro di destra si separano le somme e lo si trasforma in

$$\frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g_{jl} \dot{q}_l + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n g_{kj} \dot{q}_k,$$

dove si è tenuto conto che il simbolo δ rimuove una delle due somme, lasciando sopravvivere un solo termine. Infine nella prima somma si cambia l'indice di somma l in k , e nella seconda si ricorda che $g_{kj} = g_{jk}$, sicché le due somme risultano di fatto identiche. Si ottiene così la formula voluta.

Raccogliendo tutti i contributi scriveremo le equazioni di Lagrange nella forma

$$\sum_{k=1}^n g_{jk} \ddot{q}_k + \sum_{k,l=1}^n \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q_l} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial t} + \frac{\partial b_j}{\partial q_k} - \frac{\partial b_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial b_j}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial c}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Si vede dunque che la risolubilità delle equazioni rispetto alle derivate seconde \ddot{q} è garantita dalla non degenerazione della metrica dell'energia cinetica.

Ricordando poi che le equazioni complete, incluse le reazioni vincolari, avevano la forma (6.31), che riscriviamo,

$$\mathbf{G}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F} = \mathbf{\Phi}$$

abbiamo che se sono note le funzioni $\mathbf{x}(t)$ che rappresentano il movimento del sistema allora il membro di sinistra è funzione nota del tempo, il che ci consente di determinare le reazioni vincolari. È dunque dimostrata la

Proposizione 6.16: *Per un sistema di punti materiali soggetti a vincoli olonomi, bilateri e perfetti le equazioni di Lagrange determinano univocamente il movimento e le reazioni vincolari.*

